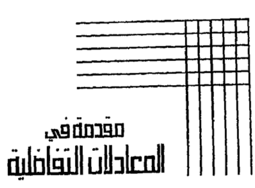
الأستاذ الدكتور رشدي خليل

# مقدمة في المعادلات التفاضلية

$D = d/dx$

اهداءات ٢٠٠٢
دار المناهج للنشر والتوزيع
سلطنة عمان


مقدمة في
المعادلات التفاضلية



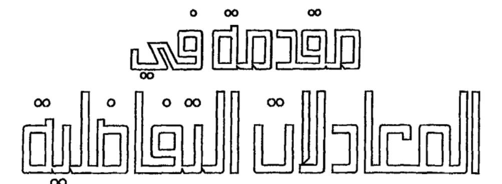
## إهـــداء

إلى زوجتي أم بلال

وابنتي رفيف وأبنائي بلال وأسامة وعبدالرحمن

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبات ١٠٣٧ / ٧ / ١٩٩٧

رقم الإجازة المتسلسل ٨٦٣ / ٧ / ١٩٩٧




تأليف

الأستاذ الدكتور رشدي خليل



الطبعة الثانية

٢٠٠١م




تلفون ٦٥٠٦٢٤ فاكس ٦٥٠٦٢٤
ص ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الاردن

# المحتويات

## VII- الوحدة الثامنة



## IX- الوحدة التاسعة



بسم الله الرحمن الرحيم

# المقــدمـة

الرياضيات هي عصب العلوم النشط . ومن أهم أفرع الرياضيات التي تظهر جليا في أفرع العلوم والهندسة هي المعادلات التفاضلية . وفي هذا الكتاب توخينا ان نضع كل ما يلزم لاول مادة تدرس في الجامعة في موضوع المعادلات التفاضلية.

ولعل المتميز في الكتاب ليست المادة بحد ذاتها . اذ ان هذه المادة متفق ( أو شبه متفق ) عليها في جامعات العالم . لكن المتميز فيه هو الصياغة اللغوية التي حرصنا على ان تؤدي وظيفتها وغايتها على أكمل وجه . لغة تحمل مادة علمية ولكن باسلوب أدبي، يجعل الطالب في عالمنا العربي يعيش ظلال علم بجرد أكسبته اللغة العربية حضرة ممزوجة بندى.

ومرة أخرى نقول ان الكتاب الاجنبي سيطر على سوقنا العلمي ردحا من الزمن لضعف المنافس. ولقد آن للغة العربية ان تصوغ الكتاب العلمي بما يكفل زحزحة الكتاب الاجنبي عن مساحات استولى عليها في فترة من غفلة الأمة.

والله نسأل ان يغيّر الواقع في أمتنا الى واقع أفضل.

المؤلــــف



# الــتــرحـــيـــب

شعر الإستاذ الدكتور رشدي خليل

معــادلات يا أهــلاً بلقــيــاك

وبــارك الله يــومــاً فيـه ألقـــاك

لولاك فاضلة ما كـان هندسة

ولاضمحلت عيــون العلم لـولاك

القلـب يجحــد إن مـرَت به حقب

أمــا أنا أبــداً مـا كنت أنســاك

الكـــل ينظــر نحــو الحــل في شغــف

تـلك الثـوابـت تـترى مــن مُحيَـاك

الطـالب الـوقــاد يبحــث دائــمــاً

عـن عـامــل التكـميــل في إعــلاك

مفصـــولة المتغــيرات أم خطَـيـــةُ

متحفَـــزُ لابـــلاس كـــي يلقـــاك

قد خــط فيــك أُيــلـر بصمـــاتهُ

ريكـــارتُ نـــادى طالـــبـــاً نجــواك

لكـــن بيســـلَ للأمـــور معقــداً

مـــا ظنَـــــهُ أن هكـــذا فحـــواك

يا أخــت حسبــان وخـالة حاسب

هـــذي السلالـــة جـــلَ مــــن ســوَاك

إنـــا عــلى الأبــواب هيــا فافتحي

بـــاب الحـلـــول أو أننـــا ننســـاك

# الوحدة الأولى

## أساسيات الجبر الخطي

**"Basics of linear algebra"**

في حـل المعـادلات التفاضليـة نتعـرض لأمـور خـارج نطـاق المعـادلات التفاضليـة واقعـة ضمـن نطـاق الجـبر الخطـي. هـذا هـو غايـة هذه الوحـدة:سـندرس موضوعـات فـي الجبرالخطي مرتبطة بحل المعادلات التفاضلية.والجبر الخطي مادة مستقلة وغنية بذاتهـا.ومـن يدري فقد نصحبك في رحلة كتاب آخر عبر خطـوط الجـبر الخطـي .لكننـا سـنكتفي فـي هـذه الوحدة بسرد بعض أفكاره الرئيسة اللازمة لنا في سفرنا عبر محيطات المعادلات التفاضلية. ولن نقوم بعملية غوص في بحر الجبر الخطي ولسوف نبقى عند الطبقة الأولى من سطحه.

## 1- المتجهات الفضائية (Vector Spaces)

سنبدأ مباشرة بتعريف المتجه الفضائي.

**تعريف 1.1** : المتجه الفضائي هو مجموعة ما ولنقل $V$ وعليها عمليتان تحقق كل منهما شروطا معينة على النحو التالي:

I- **عملية الجمع** ويرمز لها بالرمز + . وهي عملية على عناصر المجموعة $V$ بحيث:

1- العملية مغلقة على $V$ . بمعنى : لكل $v_1$، $v_2$ في $V$ يكون $v_1 + v_2 \in V$.

2- لكل $v_1$، $v_2$ في $V$ يكون $v_2 + v_1 = v_1 + v_2$ (الخاصية الابدالية) .

3- لكل $v_1$، $v_2$، $v_3$ في $V$ يكون $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (الخاصية التجميعية) .

4 - هناك عنصر $\theta$ في $V$ بحيث $v + \theta = \theta + v$ لكل v في $V$. يسمى العنصر $\theta$ العنص المحايد الجمعي.

5- لكل عنصر v في $V$ هناك عنصر $\hat{v}$ في $V$ . بحيث $v + \hat{v} = v + \hat{v} = 0$. يسمى $\hat{v}$ النظير الجمعي ل v .وعادة نكتب $-v$ بدلا من $\hat{v}$.

II- **ضرب الثوابت**.هذه عملية ليس على عناصر $V$ وإنما عملية بين عناصر $V$ وعناصر $R$ (مجموعة الأعداد الحقيقية ) أو ( $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ) بحيث :

1- لكل r في $R$ و v في $V$ يكون $r\,v \in V$.

2- لكل $v_1$، $v_2$ في $V$ و r في $R$ يكون $r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$ .

3- لكل s ، r في $R$ و v في $V$ يكون $rsv = r(sv) = s(rv)$ .

4- لكل s ، r في $R$ و v في $V$ يكون $(r + s)v = rv + sv$.

5- لكل v في $V$ يكون $1v = v$ .

ومن الأمثلة على ذلك (ونترك لك التحقق من صحة ما نقول) :

**مثال(1)** : $V = R$ والعمليتان هما عمليتا الجمع والضرب العاديتين على $R$ .

**مثال(2)** : نأخذ $V$ لتكون مجموعة الاقترانات المتصلة علىالفترة $I = [a, b]$ ، ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $C[a, b]$ .أما العمليات فهي :

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ لكل x في $[a, b]$ حيث $f(x) + g(x)$ هو مجموع عددين حقيقين.

(ii) $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$ لكل $r, x$ في $\mathbf{R}$ .

**مثال(3)** : نأخذ $\mathbf{V}$ لتكون مجموعة كل الحدوديات التي درجتها أقل أو يساوي n ،ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $\mathbf{P}_n$ .

أما العمليات فهي الجمع والضرب كما في مثال(2).

ونكتفي بهذه الأمثلة الثلاث لننتقل إلى تعريف آخر .

| **تعريف 1.2** : إذا كان $\mathbf{V}$ متجه فضائي و $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ فإن $\mathbf{W}$ يسمى متجه فضائي جزئي إذا كان $\mathbf{W}$ مغلقا تحت عملية الجمع وضرب الثوابت. |
|---|

ومن الأمثلة على ذلك :

(i) $\mathbf{P}_n$ متجه فضائي جزئي من $\mathbf{C}[a , b]$ .

(ii) $\mathbf{P}_2$ متجه فضائي جزئي من $\mathbf{P}_3$.

والآن إلى بند جديد.

---

# مسـائـل

**الوحدة الأولى**

**بند-1**

1- عين أي المجموعات التالية تشكل متجها فضائيا حقيقيا بالنسبة لعمليتي الجمع وضرب الثوابت العاديتين:

(a) $\mathbf{V} = \{ (0,y) : y \in \mathbf{R} \}$.

(b) $\mathbf{V} = \{ (1,y) : y \in \mathbf{R} \}$.

(c) $\mathbf{V} = \{(x,y) : x \geq y , x،y \in \mathbf{R} \}$

(d) $\mathbf{V} = \{ (x,x) : x \in \mathbf{R} \}$.

2- برهن أن المجموعات التالية تشكل متجهات فضائية حقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع وضرب الثوابت العاديتين:

(a) $\mathbf{M}_{2\times2} = \{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} . a_i \in \mathbf{R} \}$

(b) $\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ f : [a,b] \to \mathbf{R}$ : متصل $f \}$

(c) $\mathbf{V} = \{ f \in \mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] : f(0) = f(1) \}$

(d) $\mathbf{P}_n = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in \mathbf{R} \}$

3- أي من المجموعات التالية تشكل متجهات فضائية جزئية من الفضاءات التي تحويها :

(a) $\mathbf{W} = \{ f \in \mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] : f(0) \cdot f(1) = 0 \}$

(b) $\mathbf{W} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times2} : a = -d \}$

(c) $\mathbf{W} = \{ f \in \mathbf{P}_n : f(0) \geq 0 \}$

4- في أي متجه فضائي برهن أن $r \cdot \theta = \theta$ لكل $r \in \mathbf{R}$ .

5- في أي متجه فضائي برهن أنه $r \cdot v = \theta$ فإن $v = \theta$ أو $r = 0$ .

## 2 – التوليد والاستقلال (Span And Independence)

موضوع التوليد والاستقلال من المواضيع الرئيسة في الجبر الخطي.لكننا سنكتفي ببعض التعريفات والأمثلة.

**تعريف2.1** : ليكن $V$ متجها فضائيا و $v_1,\cdots\cdots,v_n$ عناصر في $V$ فإن المجموع $c_1v_1+\cdots\cdots+c_nv_n$ يسمى توافق خطي حيث $c_i$ في $R$ لكل $1\leq i\leq n$ .

**مثال(1)**: $2x^2+5e^x$ هو توافق خطي من العنصرين $f_1(x)=x^2$ و $f_2(x)=e^x$ في $C[0,1]$ .

**مثال(2)**: $2\sin(x)-\cos(x)+3x^3$ هو توافق خطي من العناصر $f_1(x)=x^2$ ، $f_2(x)=\cos(x)$ و $f_3(x)=x^3$ في $C[0,1]$ .

**تعريف2.2**: إذا كانت $E=\{v_1,\cdots\cdots,v_n\}$ مجموعة جزئية في المتجه الفضائي $V$ ، فإن مولد $E$ ونكتب $span(E)$ ،هو مجموعة كل التوافقات الخطية من عناصر $E$ .

وعليه:

$$span(E)=\{c_1v_1+\cdots\cdots+c_nv_n:\ c_i\in R\}$$

**مثال(3)**: إذا كانت $E=\{1,x\}$ فإن :

$$span(E)=\{c_1\cdot 1+c_2x:\ c_i\in R\}$$

وعليه فإن $span(E)$ هو $P_1$ .

**مثال(4)**: إذا كانت $E=\{(1,0,0)،(0,1,0)،(0,0,1)\}$ فإن

$$\begin{aligned}span(E)&=\{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\ .\ x،y،z\in R\}\\&=\{(x,y,z):\ x،y،z\in R\}\\&=R^3\end{aligned}$$

ومن الصفات الرئيسة لمولدات المجموعات نجدها في النظرية التالية :

**نظرية2.1**: إذا كان $V$ متجها فضائيا وكانت $E\subseteq V$ . فإن $W=span(E)$ متجه فضائي جزئي من $V$.

**تعريف 2.3 :** إذا كانت $v_1,\cdots\cdots,v_n$ عناصر متجه فضائي $\mathbf{V}$ فإن هذه العناصر تسمى مستقلة خطيا إذا كان التوافق الخطي :

$$c_1v_1+\cdots\cdots+c_nv_n=\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

فإن $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$

وعليه فإن مجموعة من العناصر تكون مستقلة خطيا إذا وإذا فقط هناك طريقة وحيدة لكتابة $\theta$ كتوافق خطي لعناصر المجموعة .وتكون في هذه الحالة عوامل التوافق هي الثابت صفر.

والسؤال الآن كيف نعرف ما إذا كان مجموعة من العناصر مستقلة خطيا أم لا ؟

وهنا نبحث حالتين هما الأكثر شيوعا في أفرع الرياضيات أما براهين هذه الحقائق فهي ضمن تلافيف الجبر الخطي ويمكن للطالب أن يعود لكتب الجبر الخطي ليرى البرهان .

### (a) الاستقلال الخطي في $\mathbf{R}^n$ :

1- لنفرض $\mathbf{E}=\{v_1,\cdots\cdots,v_n\}\subseteq\mathbf{R}^n$ . نكون المصفوفة $A$ والتي تتكون صفوفها من عناصر $\mathbf{E}$ . نحسب محدد $A$ والذي عادة يرمز له بالرمز $\det A$ . فإن :

| عناصر $\mathbf{E}$ مستقلة خطيا إذا وإذا فقط $\det A\neq 0$ |
|---|

2- إذا كان عدد $\mathbf{E}$ عناصر أكبر من n فإن عناصر $\mathbf{E}$ غير مستقلة خطيا أو ما يعبر عنه بـ : ( معتمدة خطيا ) .

3- إذا كان عدد عناصر $\mathbf{E}$ أقل من $n$ ، في مثل هذه الحالة لا بد من العودة إلى معادلة (*) في تعريف2.3 ونرى إن كان هناك أكثر من حل لعوامل التوافق.

**مثال(5) :** عين فيما إذا كانت المجموعات التالية مستقلة أو معتمدة خطيا في $\mathbf{R}^3$ .

(i) $\mathbf{E}_1=\{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,3)\}$

(ii) $\mathbf{E}_2=\{(1,2,3),(2,1,4)\}$

(iii) $\mathbf{E}_3=\{(1,2,1),(2,1,4),(1,0,0),(0,1,1)\}$

**الحل :** (i) حيث أن عدد عناصر $\mathbf{E}_1$ تساوي 3 في هذه الحالة نكون المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

ثم نوجد $\det A$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

وعليه عناصر $\mathbf{E}_1$ مستقلة خطيا.

(ii) في هذه الحالة لا بد من العودة إلى المعادلة (*)

$$c_1(1,2,3) + c_2(2,1,4) = (0,0,0)$$

ومنه $c_1 + 2c_2 = 0\ ,\ 2c_1 + c_2 = 0\ ,\ 3c_1 + 4c_2 = 0$

ونلاحظ هنا أن الحل لهذه المعادلات هو $c_1 = c_2 = 0$ وعليه فالمجموعة $\mathbf{E}_2$ مستقلة خطيا.

(iii) حيث أن عدد عناصر $\mathbf{E}_3$ أكبر من 3 فعناصر المجموعة $\mathbf{E}_3$ معتمدة خطيا.

**(b) الاستقلال الخطي في $C[a,b]$ :**

لنفرض أن $\mathbf{E} = \{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ مجموعة في $\mathbf{C[a,b]}$ . ولنفرض أن الاقترانات $y_1, \cdots\cdots, y_n$ قابلة للاشتقاق **n-1** من المرات . والآن نضع التعريف التالي :

**تعريف 2.4** : نسمي المحدد

$$W[y_1, \cdots\cdots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

رونسكي الاقترانات $y_1, \cdots\cdots, y_n$ .

**مثال(6)** : أوجد رونسكي $e^x$ ، $x$ .

**الحل** : $W[x, e^x] = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x$

والآن نضع الحقيقة التالية دون برهان.

**نظرية 2.2** : إذا كان $W[y_1, \cdots, y_n] \neq 0$ عند نقطة ما في مجال الاقترانات $y_1, \cdots\cdots, y_n$ فإن هذه الاقترانات تكون مستقلة خطيا.

و هذه النظرية تعطينا طريقة سهلة لمعرفة الاعتماد والاستقلال الخطي للاقترانات .

**مثال(7):** ابحث الاعتماد والاستقلال الخطي لمجموعة الاقترانات التالية :

$$E_1 = \{\sin(x), \cos(x)\} \quad (i)$$

$$E_2 = \{1, x, x+x^2\} \quad (ii)$$

**الحل:** (i) نجد رونسكي الاقترانات :

$$W[\sin(x),\cos(x)] = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

وعليه فإن $\sin(x)$ , $\cos(x)$ مستقلة خطياً .

(ii)

$$W[1, x, x+x^2] = \begin{vmatrix} 1 & x & x+x^2 \\ 0 & 1 & 1+2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

وعليه فإن $1, x, x+x^2$ مستقلة خطياً .

> **ملاحظة 2.1 :** لعلك تسائلت (وهذا دليل يقظتك) ماذا لو كان $W[y_1, \cdots, y_n] = 0$ لكل x في مجال الاقترانات ،فهل هذا يعني أن تلك الاقترانات معتمدة خطيا ؟ والجواب أنه لا نستطيع استنتاج معلومات عند الاستقلال والاعتماد الخطي من المعلومة : $W[y_1, \cdots, y_n] = 0$ . بل هناك حالات فيها $W[y_1, y_2] = 0$ عند كل نقاط المجال ولكن الاقترانين $y_1, y_2$ مستقلان خطيا.

وللمزيد من مذاق الجبر الخطي لمثل تلك الفاكهة نحيلك إلى الجبر الخطي في هذا الموضوع .

# مسـائـل

**الوحدة الأولى**

**بند-2**

1- جد مجموعة $\mathbf{E}$ بحيث $\mathbf{W}$ = span($\mathbf{E}$) :

$$\text{(a)}\qquad \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} .\ x \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\text{(b)}\qquad \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} :\ x ، y \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\text{(c)}\qquad \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} :\ x ، y ، z \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\text{(d)}\qquad \mathbf{W} = \left\{ ax^2 + bx .\ a ، b \in \mathbf{R} \right\}$$

2- هل يمكن للمجموعات التالية أن تولد $\mathbf{R}^3$ .

$$\text{(a)}\quad \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{(c)}\quad \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3- افحص أي المجموعات التالية تولد المتجه الفضائي :

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad x - y + z = 0 \ \ w - x + y + z = 0 \right\}$$

(a) $\mathbf{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ (b) $\mathbf{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

4(c) $\mathbf{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

4- صح أو خطأ :

(a) $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2 \Rightarrow \text{span}(\mathbf{E}_1) \subseteq \text{span}(\mathbf{E}_2)$

(b) $\text{span}(\mathbf{E}_1) \subseteq \text{span}(\mathbf{E}_2) \Rightarrow \mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$

(c) $\text{span}(\mathbf{E}_1) = \text{span}(\mathbf{E}_2) \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$

(d) $\{x^2+4x-3,\ 2x^2+x+5, 7x-11\}$ spans $\mathbf{P}_2$

5- افحص الاستقلال والاعتماد للمجموعات التالية :

(a) $\mathbf{E}=\{(1,2,-1),(3,1,-1)\}$ (b) $\mathbf{E}=\{(0,1,1)\}$

(c) $\mathbf{E}=\{(4,2,1),(-1,3,7),(0,0,0)\}$

(d) $\mathbf{E}=\{(1,2,-5),(-2,-4,10)\}$

6- إذا كانت $\mathbf{E}=\{2x^3-x+3, 3x^3+2x-2, x^3-4x+8, 4x^3+5x-7\}$

مجموعة جزئية من $\mathbf{P}_3$ فبرهن أن :

(a) $\mathbf{E}$ معتمدة خطيا .

(b) كل مجموعة من ثلاث عناصر في $\mathbf{E}$ مستقلة خطيا .

(c) كل مجموعة من عنصرين في $\mathbf{E}$ مستقلة خطيا .

7- افحص الاستقلال والاعتماد للمجموعات التالية :

(a) $\mathbf{E}=\{1, x, e^x\}$ (b) $\mathbf{E}=\{\sin(x), \cos(x), x\sin(x)\}$

(c) $\mathbf{E}=\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ (d) $\mathbf{E}=\{\sin(x), \sin 2(x), \sin(x)\cos(x)\}$

## 3- الأســاسي والبعــد ( Basis And Dimension )

نبدأ هذا البند بالتعريف التالي :

**تعريف 3.1** : إذا كان $V$ متجها فضائيا وكانت $E=\{v_1,\cdots\cdots,v_n\}$ بحيث $V = \text{span}\, E$ فإننا نسمي $V$ فضاء **منتهي التوليد** (**Finitely generated**) .

**مثال (1)** : $R^2$ فضاء منتهي التوليد حيث أن :

$$R^2 = \text{span}\{(1,0),(0,1)\}$$

**مثال (2)** : $P_3$ فضاء منتهي التوليد حيث أن

$$P_3 = \text{span}\{1,x,x^2,x^3\}$$

**مثال (3)** : $C[0,1]$ ليس منتهي التوليد . فليس هناك مجموعة منتهية تمسح لنا $C[0,1]$.

**تعريف 3.2** : إذا كان $V=\text{span}E$ حيث $E=\{v_1,\cdots\cdots,v_n\}$ مستقلة خطيا . فإننا نسمي $E$ أساسا للفضاء $V$ .

**مثال (1)** : في الفضاء $R^2$ ، المجموعة $E=\{(0,1),(1,0)\}$ أساس وهذا من معلوماتنا السابقة أن $\text{span}E = R^2$ ، كذلك $E$ مستقلة خطيا .

**مثال (2)** : في الفضاء $P_2$ ، المجموعة $E=\{1,x,x^2\}$ أساس ، حيث $\text{span}E = P_2$ وكذلك $E$ مستقلة خطيا .

والآن نسرد لك نص نظرية دون برهانها:

**نظرية 3.1** : إذا كان $V=\text{span}E_1=\text{span}E_2$ وكانت $E_1$ ، $E_2$ مجموعتين مستقلتين خطيا ، فإن عدد عناصر $E_1$ يساوي عدد عناصر $E_2$ .

وكأن النظرية تقول ( أي أساسين للفضاء لهما نفس عدد العناصر ).ونعتقد أنك لاحظت أن نص النظرية يعلن أن الفضاء $V$ يمكن أن يكون له أكثر من أساس وهذا قول صواب.فمثلا : $E_1=\{(0,1),(1,0)\}$ ، $E_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ هما أساسان للفضاء $R^2$ .ولكن كلاهما له نفس عدد العناصر.

والنظرية تؤهلنا أن نضع التعريف التالي :

**تعريف 3.3 :** إذا كان فضاء $\mathbf{V}$ منتهي التوليد وكانت $\mathbf{E}$ أساسا ل $\mathbf{V}$. فإن عدد عناصر $\mathbf{E}$ يسمى بعد $\mathbf{V}$ .

**مثال (1) :** بعد $\mathbf{R}^2$ هو 2، حيث $\mathbf{E}=\{(0,1),(1,0)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{R}^2$ .

**مثال (2) :** يمكنك التأكد من المعلومات التالية :

بعد $\mathbf{R}^n = n$

بعد $\mathbf{P}_n = n+1$

بعد $\text{span}\{e^x, x, \sin(x)\} = 3$ .

---

# مسـائـل

## الوحدة الأولى

**بند-3**

1- جد بعد الفضاءات التالية :

$$(a)\ \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbf{R} \right\}$$

$$(b)\ \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \quad x \cdot y \in \mathbf{R} \right\}$$

$$(c)\ \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix} \quad x \cdot y \in \mathbf{R} \right\}$$

$$(d)\ \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad x \cdot y \in \mathbf{R} \right\}$$

2- أي المجموعات التالية أساس للفضاء المرافق :

$$(a)\ \mathbf{E} = \{(2,1) \cdot (3,0)\} \quad , \ \mathbf{V} = \mathbf{R}^2$$

$$(b)\ \mathbf{E} = \{(2,3,-1) \cdot (4,1,1) \cdot (0,-7,1)\} \quad , \ \mathbf{V} = \mathbf{R}^3$$

$$(c)\ \mathbf{E} = \{1, x-1, x^2+2x+5, x^2\} \quad , \ \mathbf{V} = \mathbf{P}_2$$

$$(d)\ \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad , \ \mathbf{V} = \mathbf{M}_{2\times 2}$$

3- جد أساسا للمتجهات الفضائية الجزئية التالية :

$$(a)\ \mathbf{W} = \{(x,y,z) \quad 3x - 2y + 5z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

$$(b)\ \mathbf{W} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ : \ a_0 = 0\} \subseteq \mathbf{P}_3$$

$$(c)\ \mathbf{W} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbf{M}_{2\times 2}$$

## 4- المصفوفات والمحددات (Matrices And Determinants)

موضوع المصفوفات من المواضيع الرئيسة في الرياضيات والفيزياء وغيرها من أفرع العلوم.وسوف نكتفي بسرد تعريفها وخصائصها الرئيسة ونترك الجاد في طلب العلم يعود بنفسه إلى أمهات كتب الجبر الخطي كي يروي ظمأه العلمي.

وسنبدأ بتعريف المصفوفة والتعريف المشهور في الكتب محط نقاش . وسوف لن نفتح باب جدل هنا وسنسير على ما سادت عليه "غزية " .

| **تعريف 4.1:** المصفوفة هي صفيف مستطيلي من الأعداد الحقيقية ، مرتبة في صفوف وأعمدة .وهذه الأعداد تسمى مداخل المصفوفة . |
|---|

ومن الأمثلة على ذلك :

$$C=\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix} \text{ ، } B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\4&7\end{pmatrix} \text{ ، } A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&4&0\end{pmatrix}$$

حيث $A$ له صفان وثلاثة أعمدة ، $B$ له ثلاثة صفوف وعمودان ، $C$ له ثلاثة صفوف وعمود واحد .وإذا كانت $A$ مصفوفة لها $m$ من الصفوف و $n$ من الأعمدة فإننا نقول أن سعة $A$ هي $m \times n$ . سوف نرمز لمجموعة المصفوفات ذات سعة $m \times n$ بالرمز $M_{m \times n}$ .

وإذا كان $A \in M_{m \times n}$ فإننا نكتب $A = (a_{ij})$ ، $1 \le i \le m$ ، $1 \le j \le n$ .

يمكننا تعريف : $A + B = C$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

وكذلك $rA = D$ حيث $d_{ij} = ra_{ij}$

ولن نحملك ما لا طاقة لك به إن طلبنا منك التأكد من صحة " عملية الجمع وضرب الثوابت السابقة الذكر على $M_{m \times n}$ التي تجعل من $M_{m \times n}$ "متجها فضائيا " . وإذا كان $A \in M_{m \times n}$ وكان $V \in M_{1 \times n}$ فإننا نعرف $AV$ بالشكل :

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n\\a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n\\\vdots\\a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\cdots+a_{mn}b_n\end{pmatrix}$$

حيث $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ . وعليه يكون :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ -1\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ويرتبط مع المصفوفة مفهوم مهم هو مفهوم المحدد وليس من السهل أن نعرض لك تعريف المحدد بشكله المختزل .هذه مسؤولية أهل الجبر الخطي .لكننا نأخذ ما نحتاجه ونعرضه بصورة عملية قابلة للاستعمال.

ولذلك نعرض لك التعاريف التالية :

**تعريف 4.2 :** إذا كان $A \in M_{n \times n}$ ، فإن المصفوفة الجزئية $A_{ij}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها من حذف الصف رقم **i** والعمود رقم **j** . وعليه $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$.

فمثلا : إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ، فإن

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ، } A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ ، } A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**تعريف 4.3 :** إذا كان $A \in M_{2\times 2}$ ، فإن محدد $A$ هو :

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

فمثلا : إذا كان $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، فإن $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$

**تعريف 4.4 :** إذا كان $A \in M_{n\times n}$ ، فإن محدد $A$ هو :

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}|$$

فمثلا : إذا كان $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

فإن :

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وعليه فإن حساب محددات المصفوفات يؤول في النهاية إلى حساب محددات مصفوفات من سعة $2\times2$ .

**فمثلا :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(2-20) - 1\cdot(0-12) + 2\cdot(0+3) = 0$$

وأخيرا نعرض التعريف التالي :

**تعريف 4.5 :** إذا كان $A \in \mathbf{M}_{n\times m}$ ، وكان

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فإن منقول $A$ هو المصفوفة

$$A^{\tau} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ومن أهم خصائص المنقول :

(1) $(A+B)^{\tau} = A^{\tau} + B^{\tau}$ (2) $(\lambda A)^{\tau} = \lambda A^{\tau}$ ، $\lambda \in \mathbf{R}$

(3) $(A\cdot B)^{\tau} = B^{\tau}\cdot A^{\tau}$

# مســائــل

**الوحدة الأولى**

**بند-4**

1- إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، جد

(a) $2A + B$ (b) $B - A$

(c) $(2B - 4A)^T$

2- جد منقول كل من :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $(1, -1, 0)$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3- جد محددات المصفوفات التالية :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -8 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

## 5- القيـم الـذاتـيـة (Eigen Values)

لنفرض أن $A \in M_{n \times n}$ ، فإن :

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

فمثلا إذا كان $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، فإن $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

وهنا $I$ تمثل المصفوفة المحايدة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، وفي الحالة العامة :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث أن $A-\lambda I$ لا زالت مصفوفة مربعة ، فإنه يمكن تعريف المحدد لها .ومحدد $A-\lambda I$ سوف يعتمد على $\lambda$ .وفي الحقيقة :

| إذا كان $A \in M_{n \times n}$ فإن $\lvert A-\lambda I \rvert$ هو حدودية في $\lambda$. من الدرجة $n$ . |
|---|

وهذه الحدودية لها أصفار حقيقية أو مركبة ( وفق معلوماتنا عن أصفار الحدوديات ).وأصفار هذه الحدودية من الأهمية بمكان بحيث نفرد لها تعريفا في هذه الوحدة :

| **تعريف 5.1 :** إذا كان $A \in M_{n \times n}$ وكان $\lambda$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ . فإن $V \in M_{1 \times n}$ يسمى متجها ذاتيا للمصفوفة $A$ إذا كان $(A-\lambda I)V = 0$ حيث $0$ هي المصفوفة الصفرية في $M_{1 \times n}$ |
|---|

وموضوع المتجهات الذاتية والقيم الذاتية موضوع عميق ومتشعب .لكننا نأخذ رؤوس الأقلام منه لحاجتنا إليها. والآن كيف نجد المتجهات الذاتية لمصفوفة ما ؟ . بطريقة حل المعادلات! وإليك مثالا يبين ذلك .

**مثال(2)**: جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

**الحـل** :نجد أولا القيم الذاتية . وعليه نحل المعادلة $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$

أي :
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = 0$$

ومنه
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

وعليه $\lambda = 2$ ، $\lambda = 3$ هما القيم الذاتية للمصفوفة $\mathbf{A}$ .

والآن إلى المتجهات الذاتية :

لكل قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathbf{A}$ هناك متجهات فضائية متعلقة بها .

إذن نبدأ ب $\lambda = 2$ ونحل المعادلة :

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه
$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

نجد هنا أن المعادلتين هما معادلة واحدة هي $y - x = 0$ وعليه $y = x$ .

إذن كل متجه من الشكل $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة مرتبط بالقيمة الذاتية $\lambda = 2$ .

إذن المتجهات الذاتية المتعلقة ب $\lambda = 2$ هي :

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}\right\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

هل تستطيع أن تجد تلك المتجهات الذاتية المتعلقة ب $\lambda = 3$ ؟ ليس لك خيار .وسننهي الوحدة عند ذلك.

---

# مســائــل

## الوحدة الأولى

**بند-5**

1- جد القيم الذاتية للمصفوفات التالية :

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 12 & -51 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$

2- جد المتجهات الذاتية للمصفوفات التالية :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3- برهن أنه إذا كان $A \in M_{n \cdot n}$ وكان $V$ متجها ذاتيا للمصفوفة $A$ متعلقا بالقيمة الذاتية $\lambda$ فإن $AV$ كذلك .

4 - برهن أن المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ المتعلقة بقيمة ذاتية $\lambda$ تشكل متجها فضائيا .

—



# الوحدة الثانية

## المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

**First Order Differential Equation**

في هذه الوحدة سوف ندرس حلول أبسط أنـواع المعـادلات التفاضلية العادية تلك هي معادلات االمرتبة الأولى .ولا ندعي بأننا سوف نتعـرض لكـل معـادلات المرتبة الأولـى .فهذا فوق الوسع .لكننا سنغطي ما يكفل لك السباحة على شواطئ محيط المعادلات .ولقد أفردنا لكـل نوع من معادلات الدرجة الأولى بندا.سوف نقوم بعرضها تباعا.والسفر الطويل يحتاج لصاحب سفر رحب الصدر .فهلا كنت كذلك : صاحبنا في سفرنا هذا !



## 1- مقدمة (Inroduction)

هذا بند نعرض فيه تعريف المعادلة التفاضلية العادية .

### معنى المعادلة التفاضلية العادية :

" **معادلة تفاضلية** " عبارة مكونة من كلمتين : "**معادلة** " و " **تفاضلية** " . أما "**معادلة** " فتعني " **متساوية** " وهذا ليس جديدا عليك أما الصفة " **تفاضلية** " فتعني أن المتساوية تحوي على " **تفاضل** " . ووجود التفاضل يعني وجود اقتران ( أو دالة ) قابلة للاشتقاق . فلو فرضنا أن الاقتران هو $y$ وأن $x$ هو المتغير الذي يعتمد عليه $y$ فإن المعادلة التفاضلية في $y$ هي كل معادلة تحوي على $y$ وعدد من مشتقات $y$ : $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$ .

وعليه فإن المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية :

$$\text{(i)}\quad y' + x = 1$$

$$\text{(ii)}\quad y'' + e^{xy} = y'$$

$$\text{(iii)}\quad y^{(4)} + \sin(xy') = e^{x}y''$$

حيث $y^{(n)}$ هي $\frac{d^n y}{dx^n}$ .

أما المعادلة $3x = y^2 + x^2$ فهي ليست معادلة تفاضلية لخلوها من تفاضل $y$ بالنسبة للمتغير $x$ .أما كلمة " عادية " فهي صفة لا بد منها وهي تعني أن الاقتران $y$ لا يعتمد إلا على متغير واحد هو $x$ .فإذا اعتمد $y$ على أكثر من متغير ، ففي تلك الحالة، يكون الاشتقاق اشتقاقا جزئيا (partial derevative) ، وهنا نسمي المعادلة " **معادلة تفاضلية جزئية** " وهذا موضوع سوف تدرسه عند بلوغك سن الرشد الرياضي .ومرتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى مرتبة للتفاضل تظهر في المعادلة. فمثلا :

$y'' + (y')^4 = x$ هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية . والمعادلة

$y^{(5)} + \left(y^4\right)^7 = e^x$ هي من المرتبة الخامسة . وهكذا .

والآن إلى المثال التالي :

**مثال (1):** عين أي المعادلات التالية تفاضلية عادية وحدد المرتبة :

$$3x^2+(y')^2=1 \qquad (i)$$

$$4x+2y=\sin(xy) \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= xyz \qquad (iii)$$

$$(xy')^2+\left(y^{(3)}e^x\right)''=xy \qquad (iv)$$

**الحل :** (i)

$$3x^2+(y')^2=1$$

هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى .

(ii)

$$4x+2y=\sin(xy)$$

ليست معادلة تفاضلية .

(iii)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= xyz$$

هي معادلة تفاضلية لكنها ليست عادية لأن الاقتران z يعتمد على متغيرين هما y , x .

(iv)

$$(xy')^2+\left(y^{(3)}e^x\right)''=xy$$

هي معادلة تفاضلية عادية .أما المرتبة فإنها خمسة حيث أنه $\left(y^{(3)}e^x\right)''$ ينتج لنا $y^{(5)}$ بعد إكمال عملية التفاضل .

# مسـائـل

**الوحدة الثانية**

**بند-2**

1- حدد نوع المعادلات التالية :

(a) $y'' + y = x$

(b) $3xy - y = \sin x$

(c) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

(d) $y[y' - x] = x$

2- حدد مرتبة المعادلات التفاضلية التالية :

(a) $(y' + x)'' = e^x$

(b) $\dfrac{d}{dx}[y' - y] = x$

(c) $y^{(7)}[y - y^{(8)}] = y^7$

(d) $(x+y)'' = \sin y$

## 2- حل المعادلة التفاضلية (Solution of Differential Equations)

لنفرض أن لدينا معادلة تفاضلية عادية .ماذا نعني بحل تلك المعادلة ؟ . عبارة " إيجاد حل " تعني إيجاد شئ مجهول أو تحديد شئ مجهول .

والمجهول في معادلتنا هو الاقتران y .فحل المعادلة إذن نعني به إيجاد الاقتران y الذي يحقق المعادلة.فلنضع ذلك في تعريف رياضي .وقبل ذلك هل هناك شكل عام للمعادلة التفاضلية العادية ؟ نعم .فإذا كان y هو الاقتران معتمدا على المتغير x ، وكانت مرتبة المعادلة هي n فإننا نستطيع أن نكتب المعادلة بالشكل :

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

وهذا الشكل لا يعني أكثر من أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة هو مقدار يحوي على $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ . فمثلا :

$$xy' + y'' = y^{(3)} - e^{xy} + 5$$

نستطيع أن نضعها بالشكل $F\left(x, y', y'', y^{(3)}\right) = 0$ حيث $F\left(x, y', y'', y^{(3)}\right)$ ليس سوى $xy' + y'' - y^{(3)} - e^{xy} + 5$ . وإيجاد الاقتران y يحتم بالضرورة إيجاد مجال y الذي تتحقق المعادلة لكل نقطة فيه . وبالتالي يمكننا وضع التعريف التالي :

| **تعريف 2.1** : نقول بأن الاقتران الحقيقي $y = y(x)$ هو حل للمعادلة $F(x, y, y') = 0$ على الفترة I ، إذا وفقط إذا :<br>(i) الاقتران قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط I .<br>(ii) تتحقق المعادلة $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ عند كل نقطة في I . |
|---|

والآن إليك هذه الأمثلة التالية :

1- الاقتران $y = e^x$ هو حل للمعادلة $y' - y = 0$ على الفترة $(-\infty, \infty)$ .

2- الاقتران $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $(y')^2 + y^2 = 1$ على الفترة $(-\infty, \infty)$ .

3- الاقتران $y = \sqrt{x}$ هو حل للمعادلة $y' = \dfrac{1}{2y}$ على الفترة $(0, \infty)$ .

هل لاحظت معنا أن المعادلة الواحدة يمكن أن يكون لها أكثر من حل ؟ فمثلا المعادلة الأولى لها حل آخر هو $y = 2e^x$ وأيضا $y = 3e^x$ ؛ ..... . في الحقيقة يمكن أن نقول أن أي اقتران من النوع $y = ce^x$ حيث c هو عبارة عن ثابت ما، هو حل

للمعادلة $y' = y$ على الفترة $(-\infty , \infty)$ . وهذا الثابت يسمى وسيط **( parameter)** أوثابت اختياري . وهذه الملاحظات البسيطة تدفعنا لنضع التعريف التالي :

**تعريف 2.2** : نقول أن الاقتران الحقيقي y هو حل عام للمعادلة $F(x,y,y') = 0$ إذا كان y يحوي على ثابت اختياري . أما إذا خلى y من الثابت الاختياري فإنه يسمى حلا خاصا .

وعليه فإن $y = ce^x$ هو حل عام للمعادلة $y' = y$ بينما $y = 3e^x$ هو حل خاص .

**مثال(4) :** برهن أن $y = \frac{1}{x}ce^{cx}$ هو حل عام للمعادلة $xy'+y-y\ln(xy)=0$ .

**البرهان :** كل ما علينا فعله هو أن نعوض y في المعادلة ونرى هل تحققت المعادلة أم لا .

والآن إلى التعويض :

$y' = \frac{1}{x} \ (c - \frac{1}{x})ce^{cx}$ .إذن تصبح المعادلة :

$$
\begin{aligned}
&x[\frac{1}{x} (c-\frac{1}{x})ce^{cx}] + \frac{1}{x}e^{cx} - \frac{1}{x} e^{cx}\ln(x\frac{1}{x}e^{cx}) \\
&= (c-\frac{1}{x})ce^{cx} + \frac{1}{x}e^{cx} - \frac{1}{x}e^{x}\ln(e^{cx}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

" وتبارك الله أحسن الخالقين " .

---

# مســـائــل

**الوحدة الثانية**

**بند(2)**

1- افحص الاقتران إذا كان الاقتران المعطى حل للمعادلة المعطاة :

(a) $y=\sqrt{1-x^2}$ , $yy'+x=0$

(b) $y=4(x+4)$ , $(y')^2+xy'-y=0$

(c) $y=(5+\sin x)^2$ , $(y')^2-4y\cos^2 x=0$

(d) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ , $y'\sin x-y(\cos x+y\sin x)=0$

(e) $y=e^{3x}$ , $y'''-9y''=0$

2- ما هي قيمة r التي تجعل $e^{rx}$ حلا للمعادلة

$$y'''-y''-12y'=0$$

3- ما هي قيمة k التي تجعل $y=x^k$ حلا للمعادلة

$$x^2y''-6y=0 \qquad (x>0)$$

4- برهن أن $y=\tan^{-1}(x+c)$ هو الحل العام للمعادلة

$$y'-\cos^2 y=0$$

---

## 3- وجود الحل والشروط الأولية :

**( Existence of solution and initial cinditions )**

كما أخبرناك في البند الأول ،لن نتعرض في هذه الوحدة لكل معادلات المرتبة الأولى . ولكن سوف نتعرض لمجموعة من المعادلات والتي يمكن وضع صورتها العامة بالشكل $y' = f(x,y)$ . كمثل :

(1) $y' = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ .هنا $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

(2) $y'+xy = e^x$ والتي يمكن وضعها بالشكل $y' = e^x - xy$ وهنا $f(x,y) = e^x - xy$ .

(3) $3y'+x = x(y+y')$ والتي يمكن وضعها بالشكل $y' = \dfrac{xy-x}{3-x}$ ، وهنا $f(x,y) = \dfrac{xy-x}{3-x}$ .

وقبل محاولة وضع طريق لحل المعادلة $y' = f(x,y)$ لا بد أن نطمئن أن هناك حلا .فإذا لم يكن هناك حل وحاولنا وضع طريق للحل ،فإن جهدنا يذهب بلا طائل .

والسؤال الآن كيف نضمن وجود حل للمعادلة $y' = f(x,y)$ على مجال ما $I$ ،بحيث أن هذا الحل $y$ يحقق شرطا ما .ماذا نعني بشرط ما ؟ كل ما نعنيه أن $y$ يأخذ قيمة معينة كمثل : $y(1) = 0$ أو $y(0) = 1$ . ومثل تلك الشروط تسمى شروطا أولية أو ابتدائية .والشكل العام لمثل هذا الشرط هو $y(x_0) = y_0$ . وعودا إلى السؤال كيف نضمن وجود حل للمعادلة $y' = f(x,y)$ يحقق شرطا أوليا ما ؟

الجواب في النظرية التالية :

> **نظرية 3.1** : لنفرض أن $y' = f(x,y)$ معادلة تحقق الشرط التالي :
>
> " $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ , $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ وكذلك $f$ هي اقترانات متصلة في منطقة $k$ حيث $k = \{(x,y) : a \le x \le b , c \le y \le d\}$ والتي تحوي النقطة $(x_0,y_0)$ " فإن المعادلة في هذه الحالة لها حل وحيد $y = y(x)$ في فترة حول $x_0$ من الشكل $(x_0-\varepsilon , x_0+\varepsilon)$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ .

هل تريد أن نقدم لك البرهان لهذه النظرية ؟ لا نريد أن نفقد صحبتك .ولكن إن كان لسان

حالك يقول "هل من مزيد " فإنا نحيلك لكتب الحسبان المتقدم .

والآن نقدم لك المثال التالي :

**مثال(4)** : عين ما إذا كانت نظرية 3.1 تبين وجود حل للمعادلات التالية بالشروط المبينة :

$$y(0) = 6 \quad , \quad y' = x^3 - y^3 \qquad (i)$$

$$y(1) = 0 \quad , \quad yy' = x \qquad (ii)$$

$$y(1) = 0 \quad , \quad xyy' + 3e^x y + 7x = 4 \qquad (iii)$$

**الحـل :**

(i) من شكل المعادلة نحصل على $f(x,y) = x^3 - y^3$ .وهذا الاقتران متصل على $\mathbf{R}^2$ .وكذلك الحال مع $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2$ . وحيث أن (0,6) موجودة في $\mathbf{R}^2$ فإن نظرية 3.1 تؤكد لنا وجود حل للمعادلة (i) يحقق الشرط المبين .

(ii) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ .وهذا الاقتران متصل على $K = \mathbf{R}/\{(x,y): y = 0\}$ وكذلك الحال مع $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ . وحيث أن (0 ,1) غير موجودة في K،فإننا غير قادرين أن نستخلص من نظرية 3.1 وجود حل للمعادلة يحقق الشرط المبين .

(iii) هنا $f(x,y) = \frac{4 - 3e^x y + 7x}{xy}$ . وهذا الاقتران متصل على $K = \mathbf{R}^2/\{(x,y): x \cdot y = 0\}$ وكذلك الأمر مع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ وحيث أن (0 ,1) غير موجودة في K ،فإننا لا نستطيع تطبيق نظرية 3.1 لاستنتاج وجود حل للمعادلة يحقق الشرط المبين .

---

والآن ، أما آن لنا أن نبحر صوب شواطئ طرق حل المعادلات كما وعدناك في بداية هذه الوحدة ! إذن البس سترة نجاتك المصنوعة من فلين الحسبان الأول والثاني ،واركب معنا ولاتخش الغرق.

## 4- طريقة فصل المتغيرات (Seperable Equations)

أخبرناك أننا سنعالج مجموعة من المعادلات من النوع $y' = f(x,y)$ .وفي هذا البند سوف نعالج أول نوع منها .

**تعريف4.1** : نسمي المعادلة $y' = f(x,y)$ معادلة مفصولة المتغيرات إذا كان الاقتران f من الشكل $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$ .

وبناء على ذلك التعريف ،فإن المعادلة المفصولة المتغيرات يمكن كتابتها بالشكل :

$$\boxed{M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0}$$

حيث $M(x) = f_1(x)$ و $N(y) = -\dfrac{1}{f_2(y)}$ .ومن الأمثلة على ذلك :

(1) $y' = e^x \sin y$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $e^x dx - \csc y\, dy = 0$ .

(2) $y' = \dfrac{x^2+1}{|y|+2}$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $(x^2+1)\,dx - (|y|+2)\,dy = 0$.

والآن كيف نحل المعادلة مفصولة المتغيرات ؟

ليس عليك سوى أن تكامل . ومنه

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$$

حيث c هو ثابت التكامل .والآن تستخدم سترة النجاة : هل تتذكر طرق التكامل من الحسبان الثاني .ذلك ما سيمكنك من إيجاد $\int M(x)\,dx$ وكذلك $\int N(y)\,dy$ .

والآن إلى بعض الأمثلة :

**مثال(3)** : حل المعادلة $xy\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$ .

**الحـل** : هذه معادلة مفصولة المتغيرات .ونكتبها بالشكل

$$\frac{x}{(x^2+1)}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0$$

وحيث أن $\int \frac{x}{(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ،وكذلك $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$ فإننا نحصل على

$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|y| = c$ ومن خصائص الاقتران $\ln z$ ، فإننا نحصل على

$\ln\left(|y|\sqrt{x^2+1}\right) = c$ ومنه $y = \frac{e^c}{\sqrt{x^2+1}}$ . وهو الحل العام لهذه المعادلة .

وقبل وضع أي مثال آخر لا بد من ملاحظة هامة :

| لحل المعادلة ليس بالضرورة إيجاد y بالشكل $y = y(x)$ ،فإن ذلك قد لا يكون متيسرا في كثير من الأحيان .في تلك الحالة يكفي أن نجد علاقة من الشكل $g(x,y) = c$ . |
|---|

**مثال(5)** : حل المعادلة $\sin x\,dx + (\cos y + y)\,dy = 0$ .

**الحـــل** : ماعلينا سوى أن نكامل .إذن

$$\int \sin x\,dx + \int(\cos y + y)\,dy = c$$

ومنه

$$-\cos x + \sin y + \tfrac{1}{2}y^2 = c$$

وهذا هو الحل العام .

# مســـائــل

**الوحدة الثانية**

**بند(4)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

| | |
|---|---|
| 1) $3y' = 2y$ | 2) $x^2y' - y^2 = 0$ |
| 3) $e^{2x}y' + e^x = 1$ | 4) $y' - e^x \sec y = 0$ |
| 5) $(y+1)(x^2+1) = xy'$ | 6) $y' = \dfrac{2x + xy^2}{4y + x^2y}$ |
| 7) $(10y^4 + 6)y' = y^5 + 3y + 2$ | 8) $y\,dy - (1+y)\cos^2 x\,dx = 0$ |

2- جد الحل الخاص للمعادلات التالية والذي يحقق الشروط المعطاة .

1) $xy' - y = 0 \quad , \; y(c) = 1$

2) $3y' + 5y = 0 \quad , \; y(0) = 3$

3) $3c^{x^2}\,dy + \dfrac{dx}{x^2} = 0 \quad , \; y(1) = 2$

4) $(x+1)y' + xy = 0 \quad , \; y(1) = 4$

5) $\sqrt{1-x^2}\,y' + y^3 = 0 \quad , \; y(1) = 1$

6) $y^2y' = x^2 \quad , \; y(1) = 2$

7) $x^2y' - y^2 - 1 = 0 \quad , \; y(1) = 0$

8) $e^{-x}y' + xy^2 = 0 \quad , \; y(0) = 1$

3- برهن أن التعويض $z = x + y$ يحول المعادلة $y' = (x+y)^2$ إلى معادلة مفصولة المتغيرات .

---

## 5 - المعادلات المتجانسة ( Homogenous Equations )

في هذا البند نعالج المعادلات التي يمكن تحويلها إلى معادلات مفصولةالمتغيرات،ونسميها بالمتجانسة . ولامناص لنا إلا أن نعرف معنى التجانس .

| |
|---|
| **تعريف 5.1 :** يسمى الاقتران $f = f(x,y)$ متجانسا من الدرجة $n$ إذا كان $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ حيث $t \in \mathbf{R}$ . |

هل تريد أمثلة على ذلك . إذن :

**مثال(1) :** $f(x,y) = x + y$ متجانس من الدرجة 1، حيث

$$f(tx,ty) = tx + ty = t(x + y) = t\,f(x,y)$$

**مثال(2) :** $f(x,y) = x^2 + y^2$ متجانس من الدرجة 2 ،حيث

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x,y)$$

**مثال(3) :** $f(x,y) = \sin\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ متجانس من الدرجة 0، حيث

$$f(tx,ty) = \sin\left(1 + \frac{tx}{ty}\right) = \sin\left(1 + \frac{x}{y}\right) = f(x,y)$$

**مثال(4) :** $f(x,y) = ye^x$ ليس متجانسا ،حيث

$$f(tx,ty) = tye^{tx} \neq t^k y e^x$$

مهما كانت $k$ في $\mathbf{R}$ .

لحل سرعة بديهتك أوصلتك إلى معنى المعادلة المتجانسة قبل أن نضع لك تعريفها ! .

| |
|---|
| **تعريف 5.2 :** تسمى المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ معادلة متجانسة إذا كان الاقتران $f = f(x,y)$ اقترانا متجانسا . |

وهنا نود أن نلفت نظرك أن شكل المعادلة $y' = f(x,y)$ يمكن كتابته بالشكل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ . وعليه فإن المعادلة متجانسة إذا كان الاقترانان $M$ , $N$ متجانسان ومن نفس درجة التجانس .والأمثلة التالية توضح ما نقول .

**مثال(5) :** أي المعادلات التالية متجانسة .

$$\left(x^2+y^2\right)dx+2xy\,dy=0 \qquad (i)$$
$$y\,dx+\left(x+y+1\right)dy=0 \qquad (ii)$$
$$x^2\,dx+\left(x^3+y^3\right)dy=0 \qquad (iii)$$

**الحـــل :** (i) $M(x,y)=x^2+y^2$ اقتران متجانس من الدرجة الثانية

$N(x,y)=2xy$ اقتران متجانس من الدرجة الثانية

إذن المعادلة متجانسة .

(ii) $M(x,y)=y$ اقتران متجانس من الدرجة الأولى

$N(x,y)=x+y+1$ اقتران غير متجانس

إذن المعادلة غير متجانسة .

(iii) $M(x,y)=x^2$ اقتران متجانس من الدرجة الثانية

$N(x,y)=x^3+y^3$ اقتران متجانس من الدرجة الثالثة

إذن المعادلة غير متجانسة .

والآن كيف نحل المعادلة المتجانسة ؟

ألم نقل لك في بداية البند أن هذه المعادلة يمكن تحويلها إلى مفصولة المتغيرات .ولكن كيف يمكن ذلك ؟

ما علينا سوى أن نقوم بالتعويض التالي :

$y=vx$ والذي يعطينا : $dy = v\,dx + x\,dv$ .

فإذا ما استبدلنا $vx$ بـ$y$ واستبدلنا $v\,dx+x\,dv$ بـ$dy$ فإن المعادلة

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ تصبح بالشكل

$$\frac{1}{x}\,dx+\frac{N(1,v)}{M(1,v)+vN(1,v)}\,dv=0$$

وهذه معادلة مفصولة المتغيرات .نحل المعادلة ثم نعوض $v=\frac{y}{x}$ لنحصل على الحل العام للمعادلة الأصل.

والآن إلى مثال يكون شاهدا ومبلغا ويسيرا .

**مثال (6):** حل المعادلة $y'=\frac{y+x}{x-y}$ .

**الحـــل :** يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$ وهذه معادلة متجانسة.إذن نضع $y=vx$ وكذلك

ومنه نحصل على. $dy = v\,dx + x\,dv$

$$(x+vx)\,dx + (vx-x)\left(v\,dx + x\,dv\right) = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{v^2+1}dv = 0$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(v^2+1) - \tan^{-1}v = \ln c \quad , c>0$$

وباستخدام خصائص الاقترانين $f(x) = \ln x$ و $g(x) = e^x$ نحصل على

$$x\sqrt{v^2+1} = ce^{\tan^{-1}v} \quad , \quad c \neq 0$$

وأخيرا نعوض $v = \dfrac{y}{x}$ لنجد أن الحل العام للمعادلة هو بالشكل

$$\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2} = ce^{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

وما أجمل النهاية الصحيحة .

---

# مســائــل

## الوحدة الثانية

**بند(5)**

1- أي الاقترانات التالية متجانسة وأيها غير متجانسة.وفي حالة التجانس أعط الدرجة .

(a) $f(x,y) = x^2 + xy - x^2(x+y)$

(b) $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y} + 1\right) + 5$

(c) $f(x,y) = x\sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y}$

(d) $f(x,y) = x\ln y + ye$[illegible]

(c) $f(x,y) = e$[illegible] $+ \frac{2x}{y}$

2- حل المعادلات التفاضلية التالية .

(a) $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0 \quad , \; y(1) = 2$

(b) $y\,dx - \left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0 \quad , \; y(1) = 0$

(c) $xy' - y\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right] = 0$

(d) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$

(e) $(x^2 + y^2)dx + 3xy\,dy = 0$

(f) $y^2xy' + y^3 - x^3 = 0$

(g) $x^2y' - y^2 - 4yx = 0$

3- برهن أن الاقتران $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$ يحقق المعادلة

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f \; .$$

4- برهن أنه إذا كان $f(x,y)$ اقترانا متجانسا من الدرجة $n$ فإن $f$ يحقق معادلة أيلر للاقترانات المتجانسة :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf \; .$$

## 6- المعادلات المضبوطة (Exact Equations)

كم يتمنى أحدنا أن يكون كل شيء في حياتنا مضبوطا .وفي هذا البند سوف نناقش معادلة مضبوطة. وإليك التعريف .

**تعريف 6.1** : نسمي المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ معادلة مضبوطة في المنطقة K إذا وجد اقتران $F= F(x,y)$ بحيث $M(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ , $N(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ لكل $(x , y)$ في K.

ولكن من معلوماتنا من حسبان(3) ، فإن تفاضل F يمكن وضعه بالشكل :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy$$

وعليه إذا كانت المعادلة مضبوطة فإنها تأخذ الشكل $dF = 0$ والتي يكون حلها $F(x,y) = c$، حيث c ثابت ما .

وللوصول إلى ذلك الحل السهل تعترضنا مشكلتان : -

(i) كيف يمكننا الفحص بيسر على أن المعادلة مضبوطة ؟

(ii) كيف نجد الاقتران F الوارد في تعريف 6.1 ؟

لكأننا نرى الشوق في عينك إلى معرفة الإجابة ؟ لقد صحبتنا ،فلسوف نكرم صحبتك .إليك الحل للمشكلتين :

**نظرية 6.2** : لنفرض أن $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هما اقترانان متصلان على المنطقة K بحيث $\dfrac{\partial M}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial N}{\partial y}$ كلها موجودة ومتصلة على K .إذا كان $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ فإن المعادلة $M\,dx + N\,dy = 0$ معادلة مضبوطة .

هذه النظرية تعطينا طريقة سهلة لفحص انضباط المعادلة ، وبرهانها خارج نطاق هذا الكتاب ، وتجده في الكتب المتقدمة للحسبان.والآن إلى الأمثلة :

**مثال(1) :** $(2x+e^y)\,dx + xe^y\,dy = 0$ معادلة مضبوطة على $\mathbf{R}^2$ حيث
$\dfrac{\partial N}{\partial x} = e^y \,,\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^y$ .

**مثال(2) :** $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right)\ dy = 0$ .
هنا M و N متصلان ولهما مشتقات جزئية متصلة على $K = \{(x,y) : x>0 \,, y>0\}$.
وكذلك : $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \,,\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$
إذن المعادلة مضبوطة.

أما كيف نجد الاقتران فإليك البيان المضبوط في إزالة الشبهة والغموض :
ما هي المعطيات ؟ إنها : $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N \,,\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ .
حيث أن $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ ، فإن التكامل بالنسبة لـ x يعطينا :
$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c$ حيث c هو ثابت التكامل . لكن c ثابت بالنسبة لـ x وليس بالنسبة لـ y ، وعليه $c = c(y)$ . لنجد c : نشتق الآن بالنسبة لـ y ما نتج عن التكامل بالنسبة لـ x . وعليه :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}c(y)$$

نعوض عن $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ بـ N لنحصل على

$$\frac{\partial}{\partial y}c(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

هذه المعادلة تعطينا c وذلك بالتكامل بالنسبة لـ y .
وهذا يحدد لنا F تماما .

والآن إلى المثال التالي :

**مثال(3) :** حل المعادلة $(2x+e^y)\,dx + xe^y\,dy = 0$
**الحـــل :** هذه المعادلة مضبوطة كما في مثال(1) .إذن

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + e^y$$

نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على :

$$F(x,y) = x^2 + xe^y + c(y)$$

نفاضل بالنسبة لـ y لنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \frac{\partial c}{\partial y}$$

نستخدم المتساوية $N = \frac{\partial F}{\partial y}$ لنحصل على :

$$xe^y = xe^y + \frac{\partial c}{\partial y}$$

أي أن $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$ ومنه $c = \lambda$ ، حيث $\lambda$ ثابت حقيقي .

إذن الحل العام له الشكل $x^2 + xe^y = \gamma$ ، حيث $\gamma$ ثابت ما .

هل تريد مثالا آخر ؟ ما عليك إلا أن تقول نعم . إذن :

**مثال(4) :** حل المعادلة $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) dy = 0$

**الحـــل :** هذه المعادلة مضبوطة كما في مثال(2) على $K = \{(x,y): \ x > 0 \ , \ y > 0 \ \}$

إذن :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln y$$

نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على :

$$F(x,y) = y\ln x + x\ln y + c(y) \cdots\cdots(*)$$

نفاضل بالنسبة لـ y لنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \frac{x}{y} + \frac{\partial c}{\partial y}$$

نستخدم المتساوية $N = \frac{\partial F}{\partial y}$ لنحصل على :

$$1 + \frac{x}{y} + \ln x = \frac{x}{y} + \ln x + \frac{\partial c}{\partial y}$$

أي أن $\frac{\partial c}{\partial y} = 1$ والذي يعطينا $c(y) = y + a$ ، حيث a ثابت حقيقي .

إذن من معادلة (*) يكون الحل العام له الشكل

$$y\ln x + x\ln y + y = b$$

حيث b ثابت حقيقي ما .

وهذا يضبط نهاية هذا البند .

# مســائــل

**الوحدة الثانية**

**بند(6)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $2xy\,dx + (x^2+4y)\,dy = 0$

(2) $y(y^2-3x^2)\,dx + x(3y^2-x^2)\,dy = 0$

(3) $\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

(4) $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$

(5) $\frac{ydx - xdy}{(x+y)^2} + \frac{1}{y}\,dy = 0$

(6) $x^2\,dx + y^2\,dy + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0$

(7) $\frac{ydx - xdy}{xy} + \frac{xdy + ydx}{\sqrt{1+(xy)^2}} = 0$

(8) $(1+\ln xy)\,dx + \left(1+\frac{x}{y}\right)dy = 0$

(9) $\left(\frac{y}{x}+\ln y\right)dx + \left(\frac{x}{y}+\ln x\right)dy = 0$

(10) $(ye^x + e^y)\,dx + (e^x + xe^y)\,dy = 0$

(11) $(\cos xy - \sin xy)(y\,dx + x\,dy) = 0$

(12) $2\sec^2(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$

(13) $(1+\tan xy)\,dx + (\sec xy\tan xy + x\sec^2 xy)(y\,dx + x\,dy) = 0$

(14) $y(e^{xy}+y)\,dx + x(e^{xy}+2y)\,dy = 0$

(15) $\frac{(y\,dx + x\,dy)}{1+(xy)^2} = 0$

2- ما هي قيم r التي تجعل المعادلات التالية مضبوطة .

(1) $2y\,dx + (y^2 - rx)\,dy = 0$

(2) $\sin y\,dx + (x' \cos y + y^3)\,dy = 0$

(3) $(y^4 + 2rxy)\,dx + (4xy^3 + rx^2)\,dy = 0$

(4) $(3x^2 - 3y' + rx)\,dx + (3xy^{-2} - 3r + 7)\,dy = 0$

---

## 7 - عامل التكميل ( Integrating Factor )

ليس كل شيء مضبوطا في هذه الحياة .وهنا يأتي جهد الإنسان ليضبط غير المضبوط.
وفي خذا البند سوف نحاول ضبط المعادلات غير المضبوطة.
وهذا يستدعي التعريف التالي :

**تعريف 7.1** : لنفرض أن

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \cdots\cdots(*)$$

معادلة معطاة وأن $u = u(x,y)$ . إذا كانت المعادلة

$$u(x,y)\cdot M(x,y)\,dx + u(x,y)\cdot N(x,y)\,dy = 0$$

مضبوطة، فإن الاقتران $u$ يسمى عامل التكميل للمعادلة (*) .

ومن الأمثلة على ذلك :

**مثال(1)** : $(x+2y)\;dx - x\,dy = 0$ .

هذه المعادلة ليست مضبوطة حيث $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$ , $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$ .

ولكن لنضرب المعادلة بـ $u(x,y) = \frac{1}{x^3}$ .فإن المعادلة تصبح

$$\frac{x+2y}{x^3}\;dx - \frac{1}{x^2}\,dy = 0$$

هذه المعادلة مضبوطة حيث $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$ , $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x^3}$ .

إذن عملية ضبط المعادلة تتلخص في إيجاد عامل التكميل.
وبعد ذلك نحل المعادلة علىأنهامعادلة مضبوطة .
والسؤال : " كيف نجد عامل التكميل " ؟
هناك قواعد معينة عامة لايجاد ذلك العامل نلخصها لك تلخيص سهل ممتنع في القاعدة العامة التالية :

**قاعدة إيجاد عامل التكميل للمعادلة :**

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

1- إذا كان $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ فإن عامل التكميل هو $u(x,y) = e^{\int f(x)\;dx}$

2- إذا كان $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x)$ فإن عامل التكميل هو $u(x,y) = e^{-\int g(x)\;dx}$

3- إذا كان $M$ و $N$ متجانسان من نفس الدرجة فإن عامل التكميل هو $u = \dfrac{1}{xM + yN}$

4- إذا كان $M = x\,f(x \cdot y)$ , $N = x\,g(x \cdot y)$ وكان $f \neq g$ فإن عامل التكميل هو $u = \dfrac{1}{xy\left[f(x \cdot y) - g(x \cdot y)\right]}$ .

هل هناك حالات أخرى يمكن إيجاد عامل التكميل ؟

نعم إليك هذه المجموعة من الحالات :

5- إذا ضمت المعادلة المقدار $y\,dx + x\,dy$ فإن $u(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ يحول $y\,dx + x\,dy$ إلى $\dfrac{y\,dx + x\,dy}{xy} = d(\ln xy)$ .

6- إذا ضمت المعادلة المقدار $x\,dx + y\,dy$ فإن $u(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ يحول $x\,dx + y\,dy$ إلى $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}d(\ln(x^2 + y^2))$ .

7- إذا ضمت المعادلة المقدار $y\,dx - x\,dy$ فإن $u(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$ يحول $y\,dx - x\,dy$ إلى $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$ .

ولا بد أن تلاحظ أنه في الحالة(7) يمكن استخدام

(i) $\dfrac{1}{x^2}$ لنحصل على $-d\left(\dfrac{y}{x}\right)$ .

(ii) $\dfrac{1}{xy}$ لنحصل على $d\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$ .

(iii) $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ لنحصل على $d\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)$ .

لعلنا بالغنا في الجفاف ، واصبح الأمر يحتاج إلى قطر الندى .

**مثال(2)** : حل المعادلة $2x\,dx + \left[(x^2+1)\cot y - 1\right] dy = 0$ .

**الحـــل** : هذه المعادلة ليست مضبوطة .إذن نحاول إيجاد عامل تكميل .

نجد المقدار $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ .وإن أجريت الحسابات ستجده يساوي $-2x\cot y$ .

إذن $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\cot y$ .

وحسب القاعدة(2) فإن عامل التكميل هو

$$u(x,y) = e^{-\int g(x)\; dx} = e^{\int \frac{\cos y}{\sin y} dx}$$
$$= e^{\ln \sin y} = \sin y$$

نستخدم عامل التكميل لنحصل على المعادلة :

$$2x\sin y\,dx + \left[(x^2+1)\cos y - \sin y\right] dy = 0$$

إذن نحلها كما في البند السابق لنحصل على شكل الحل العام :

$$(x^2+1)\sin y + \cos y = b$$

حيث $b$ ثابت ما .

**مثال(3)** : حل المعادلة $xy^2\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$ .

**الحـــل** : نلاحظ أن المعادلة ضمت المقدار $y\,dx - x\,dy = 0$ .

وهذا المقدار تعلق به حسب الحالة(7) أربعة كميات :

$\frac{1}{x^2}$ , $\frac{1}{y^2}$ , $\frac{1}{xy}$ , $\frac{1}{x^2+y^2}$ .نختار منها ما يناسب المعادلة .والذي يناسب المعادلة هو ذلك المقدار الذي يصنع مما بقي من المعادلة ( وهو $xy^2\,dx$ ) تفاضل كامل .أي ما يمكننا من كتابة ( $xy^2\,dx$ ) على شكل $d\theta$ لمقدار ما $\theta$ .ولا نظنك تخالفنا الرأي إن قلنا لك أن $\frac{1}{y^2}$ يفي بالغرض حيث $\frac{1}{y^2}\cdot xy^2\,dx$ يصبح $\frac{1}{2}dx^2$ .

وعليه فإن عامل التكميل لمعادلتنا هو $\frac{1}{y^2}$ .وتصبح المعادلة بالشكل :

$$\frac{xy^2\,dx}{y^2} + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\,dx^2 + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} = b$$

حيث b ثابت ما .

نعم إنك فرح بهذه النهاية وكذلك نحن ،وإلى بند آخر لنعالج فوجا جديدا من المعادلات .

---

# مسـائـل

**الوحدة الثانية**

**بند(7)**

1- حول المعادلات التالية إلى معادلات مضبوطة عن طريق إيجاد عامل التكميل ثم حل المعادلة .

(a) $y'+xy=3x$ (b) $y'-\frac{1}{2x}y=2$

(c) $y'-2y=xe^{2x}$ (d) $y'+\frac{4xy}{x^2+1}-3x=0$

(e) $y'+\frac{1}{x\ln x}y=3x^2$

2- جد الحل العام للمعادلات التالية عن طريق إيجاد عامل التكميل

(1) $3x^4y^2\,dx+y\,dx+x\,dy=0$

(2) $y(y^2+1)\,dx+x(y^2-1)\,dy=0$

(3) $y\,dx+\left[y(x^2+y^2)-x\right]dy=0$

(4) $\left(\frac{y}{x}+2\right)dx+\left(\frac{x}{y}+2\right)dy=0$

(5) $y(xy+1)\,dx-x(xy-1)\,dy=0$

(6) $(1+xy)\,dx+x^2\,dy=0$

(7) $\left(x-y(x^2+y^2)\right)dx+\left(y+x(x^2+y^2)\right)dy=0$

(8) $y^2\,dx+(x^2-xy-y^2)\,dy=0$

(9) $y(y^3+1)\,dx-x(y^3-2)\,dy=0$

(10) $(y^2+1)\,dx+y(x+y^2-1)\,dy=0$

(11) $(x^2+y^2+x)\,dx+xy\,dy=0$

(12) $(\sec x+y\tan x)\,dx+dy=0$

(13) $y\,dx+x(1-x^2y^2)\,dy=0$

(14) $\left[2\tan x+(x+y)\sec^2 x\right]dx+2\tan x\,dy=0$

(15) $x\,dy-y\,dx-(1-x^2)\,dy=0$

## 8- المعاملات الخطية (Linear Coefients)

في هذا البند نعالج نوعا آخر من المعادلات الخطية ذات المرتبة الأولى. وهذا النوع هو:

| **تعريف 8.1:** تسمى المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ذات معاملات خطية إذا كان $M(x,y) = a_1x+b_1y+c_1 \quad , \quad N(x,y) = a_2x+b_2y+c_2$ . |
|---|

**مثال (1):** $y' = \dfrac{x+1}{2x+y-3}$ هي معادلة ذات معاملات خطية ، حيث :

$$N(x,y) = -(2x+y-3) \quad , \quad M(x,y) = x+1 \; .$$

**ملاحظة:** إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة تصبح متجانسة .

والآن كيف يمكن أن نحل المعادلة ذات المعاملات الخطية ؟ إليك البيان الشافي :

هناك حالتان لا بد من علاجهما .

| **الحالة الأولى :** $a_2x+b_2y = t(a_1x+b_1y)$ |
|---|

في هذه الحالة نقوم بالتعويض $u = a_1x+b_1y$ .

ومنه نحصل على $du = a_1dx+b_1dy$ أو $u' = a_1+b_1y'$ وعليه

$y' = \dfrac{u'-a_1}{b_1}$ . نعوض في المعادلة الأساسية لنحصل على :

$$u'-a_1 = b_1\left(\frac{u+c_1}{tu+c_2}\right)$$

وهذه معادلة مفصولة المتغيرات في $u$ و $x$ . نحلها كما في البند الأول ثم نعوض بدل $u$ بـ $a_1x+b_1y$ .

| **الحالة الثانية :** $a_2x+b_2y \neq t(a_1x+b_1y)$ لكل $t$ في $\mathbf{R}$ |
|---|

وهذه تحصل عندما يكون $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ ( أما إذا كان $a_1b_2-a_2b_1 = 0$ فتلك هي الحالة الأولى ) .

ولمعالجة هذه الحالة ، نضع التعويض التالي :

$$x = u + d_1 \quad , \quad y = v + d_2$$

حيث $d_1$ , $d_2$ ثابتان نختارهما بحيث تصبح المعادلة :

$$(a_1u + b_1v)\, du + (a_2u + b_2v)\, dv = 0 \cdots\cdots (*)$$

وعليه فإن $d_1$ , $d_2$ يحققان المعادلتين :

$$a_1d_1 + b_1d_2 + c_1 = 0 \quad \cdots\cdots (i)$$

$$a_2d_1 + b_2d_2 + c_2 = 0 \cdots\cdots (ii)$$

المعادلة (*) متجانسة . نحلها وفق طريقة البند الثاني. ثم نجد $d_1$ , $d_2$ بحل المعادلتين (i) , (ii) ونعوض $u = x - d_1$ , $v = y - d_2$ .

والآن إلى مثال يرطب ذاك الجفاف .

**مثال(2)** : حل المعادلة $y' = -\dfrac{x + y + 1}{x + y}$ .

**الحـــل** : هذه المعادلة ذات معاملات خطية .ونلاحظ أن

$a_1x + b_1y = x + y$ , $a_2x + b_2y = x + y$ . وعليه فإن الوضع هو وضع الحالة الأولى .

إذن نضع $x + y = u$ ومنه $y' = u' - 1$ نعوض في المعادلة لنحصل على :

$$u' - 1 = -\frac{u + 1}{u}$$

ومنه $udu = -xdx$ ، وعليه $x^2 + u^2 = c$ حيث c ثابت ما. وحيث $u = x + y$ فإن الحل العام للمعادلة هو $x^2 + (x + y)^2 = c$ .

**مثال(3)** : حل المعادلة $(x + 2y - 5)dx + (4 - 2x - y)dy = 0$ .

**الحـــل** :وضع هذه المعادلة هو وضع الحالة الثانية .إذن نضع

$x = u + d_1 \quad , \quad y = v + d_2$ ،حيث

$$d_1 + 2d_2 - 5 = 0 \quad , \quad 4 - 2d_1 - d_2 = 0 \cdots\cdots (i)$$

تصبح المعادلة بالشكل :

$$(u + 2v)\, du + (-2u - v)\, dv = 0$$

وهذه معادلة متجانسة .وطريقة حلها : نضع $w = \dfrac{v}{u}$ ومنه $dv = u\, dw + w\, du$ .

نعوض لنحصل على :

$$(u + 2uw)\, du - (2u + uw)(u\, dw + w\, du) = 0$$

نجمع الحدود لنحصل على :

$$u(1-w^2)\,du - u^2(2+w)\,dw = 0$$

وبالتالي :

$$\frac{du}{u} - \frac{2+w}{1-w^2}\,dw = 0$$

تكامل لينتج لدينا :

$$\ln|u| - \left[\ln\left|\frac{1-w}{1+w}\right| - \frac{1}{2}\ln|1-w^2|\right] = c$$

ومنه $\frac{u^2(1+w)^3}{1-w} = b$ ، حيث b ثابت ما . نعوض $w = \frac{v}{u}$ ليكون :

$$\frac{(u+v)^3}{(u-v)} = b$$

والآن نجد $d_1$ , $d_2$ :

$$d_1 + 2d_2 = 5$$
$$2d_1 + d_2 = 4$$

نحلها لنحصل على $d_1 = 1$ , $d_2 = 2$ .

إذن الحل العام لمعادلتنا هو :

$$\frac{(x+y-3)^3}{(x-y-1)} = b$$

لعل هذا ينهي البند دون غموض .

## مســـائـــل

**الوحدة الثانية**

**بند(8)**

1- حل المعادلات التالية :

(1) $(x+2y-5)\,dx+(4-2x-y)\,dy=0$

(2) $(6x-y+5)\,dx-(4x-y+3)\,dy=0$

(3) $(2x+3y)dx+(3x-y-11)\,dy=0$

(4) $(x-y-2)\,dx+(2-x-2y)\,dy=0$

(5) $(x+2y+3)\,dx+(x+7)\,dy=0$

(6) $(x-2y-1)\,dx-(4x-9y-4)\,dy=0$

(7) $(2x-3y+5)dx+(y-1)\,dy=0$

(8) $(4x+y-2)\,dx+(3x+y-2)\,dy=0$

(9) $(5x+4y-4)\,dx+(4x+5y-5)\,dy=0$

(10) $(9x+3y-12)\,dx-(3x-y-2)\,dy=0$

---

## 9- اختزال الرتبة ( Reduction Of Order )

هنا نعالج معادلات المرتبة الثانية والثالثة والتي يمكن تحويلها إلى المرتبة الأولى .
وسوف نعالج عملية تحويل المعادلة في حالتين :

**الحالة الأولى :** عدم ظهور $y$ في المعادلة

كمثل $y'' + y' = x$ و $xy''' + e^x y' = 1$ .

وطريقة الحل لمثل هذه الحالة هو التعويض $y' = u$ , $y'' = u'$

**مثال(1):** حل المعادلة $xy'' = y'$ .

**الحل :** نضع $y' = u$ وعليه $y'' = u'$ .

تصبح المعادلة إذن $xu' = u$ ومنه $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$ وبالتكامل نحصل على : $u = ax$

حيث $a$ ثابت موجب .ولكن $u = y'$ . إذن $y' = ax$ ومنها نحصل بالتكامل على

$y = \frac{ax^2}{2} + b$ ، وهذا هو الحل العام للمعادلة.

هل لاحظت أن الحل العام يحتوي على ثابتين . ذلك لأن المعادلة من المرتبة الثانية .

**الحالة الثانية :** عدم ظهور $x$ في المعادلة

كمثل $y'' - y' = 0$ و $yy'' + y' = y^2$ .

وطريقة الحل لمثل هذه الحالة هو التعويض $y' = u$ ويكون $y'' = u\frac{du}{dy}$

**مثال(2):** حل المعادلة $yy'' + (y')^2 = 0$ .

**الحل :** نضع $y' = u$ . ومنه $\frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ .أي أن $y'' = u\frac{du}{dy}$ .

وبالتعويض في المعادلة تصبح المعادلة كالآتي :

$$y u \cdot \frac{du}{dy} + u^2 = 0$$

ومنه
$$\frac{du}{u} + \frac{dy}{y} = 0$$

وبالتكامل نحصل على : $u \cdot y = a$ ، حيث $a$ ثابت موجب .ولكن $u = y'$ . إذن $y'y = a$ . وبالتالي $y\,dy = a\,dx$ و بالتكامل نحصل على $y^2 - ax = b$ ، و هو الحل العام للمعادلة.

دعنا نقف عند هذا الحد لنجعل هذا البند بندا خفيفا .

# مسائل

الوحدة الثانية

**بند(9)**

1- حل المعادلات التالية :

(1) $xy'' = y'$

(2) $yy'' + (y')^2 = 0$

(3) $y''' - y'' = 1$

(4) $y'' = 1 + (y')^2$

(5) $y'' - k^2 y = 0$

(6) $yy'' + (y')^3 = 0$

(7) $yy'' = 2y^2 - 2y'$

(8) $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$

(9) $(y^2 + 1)y'' - 2y(y')^2 = 0$

(10) $y'' + 2y - 2y^3 = 0$

# الوحدة الثالثة

## المعادلات التفاضلية الخطية

**" Linear Differential Equations "**

هذه الوحدة نعالج فيها نمطا جديدا من المعـــادلات التفاضلية ،تلك هي المعـــادلات التفاضلية الخطية.



## 1- التعـريـف :

كما ورد في البند السادس للوحدة الأولى فإن من أهم أنواع المؤثرات على المتجهات الفضائية هي مؤثرات التفاضل والتي تؤثر على الاقترانات القابـلة للتفاضل . ومثـل تلك المؤثرات تشكل العمود الفقري لموضوعنا في هذه الوحدة والتي تليها .وسنبدأبتعريفنا الرئيسي لهذه الوحدة.

**تعريف 1.1:** المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة **n** هي كل معادلة من الشكل :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\, y = f \cdots (*)$$

حيث $f\ ,\ a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots, a_0$ هي اقترانات معرفة على الفترة **I** ، وهي مجال تفاضل $y$ ،وكذلك $a_n$ ليس الاقتران الصفري على **I** .إذا كان $a_n \neq 0$ لكل $x$ في **I** فإن المعادلة تسمى معادلة خطية طبيعية.

ومن الأمثلة على ذلك :

$$y'' + xy' - 3y = e^x \qquad (1)$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad (2)$$

$$(x+1)y^{(4)} + 2y'' - 2y = \sin x \qquad (3)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (*) باستخدام المؤثرات الخطية على النحو التالي :

$$\boxed{L(y) = f}$$

حيث $L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \cdots\cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ .

والمعادلات الخطية نوعان :

1- معادلات خطية متجانسة. وهي المعادلات التي يكون فيها $f = 0$ . وعليه فهي من الشكل $L(y) = 0$ .

2- معادلات خطية غير متجانسة. وهي المعادلات التي يكون فيها $f \neq 0$ .

وكلا النوعين يكون على نوعين :

(1) معادلات خطية ذات معاملات متغيرة .وهي المعادلات التي يكون فيها $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \cdots\cdots , a_0$ اقترانات في $x$ .

(2) معادلات خطية ذات معاملات ثابتة .وهي المعادلات التي يكون فيها $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \cdots\cdots , a_0$ ثوابت .

أتريد أمثلة توضح هذه الأنواع ؟ سنفعل إن أصغيت بقلبك ونظرت ببصيرتك .

**مثال(1)** : بين نوع المعادلات التالية :

$$x^2y'' + y' - 3y = 0 \qquad (i)$$

$$y^{(4)} - 3y'' + y = \tan x \qquad (ii)$$

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0 \qquad (iii)$$

$$xy''' + x^2y'' + \frac{1}{1+x^2}y' = e^x \qquad (iv)$$

**الحل** : (i) معادلة خطية متجانسة ذات معاملات متغيرة .

(ii) معادلة خطية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

(iii) معادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة .

(iv) معادلة خطية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة .

وكل من المعادلات الأربعة طبيعية على $[1, \infty)$ مثلا .

هذا هو شكل المعادلات الخطية . فكيف يكون الحل ؟ لننتقل إذن إلى البند الثاني .

# مســائــل

**الوحدة الثالثة**

**بند(1)**

1- عين نوع المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' + x^2 y = 1$

(2) $y'' - e^x y' + e^x = 0$

(3) $y'' - yy' = 2x + 3$

(4) $(\sin x) y''' + y'' - y = 0$

(5) $(y + x) y' + 5y'' = 1$

(6) $2y'' - 3y' + y + \cos x = 0$

(7) $(y' + 1)'' + y = 0$

(8) $e^y + y' = x$

(9) $\sin y' + \cos y = 0$

(10) $y'' + y' + y = e^{x}$

## 2- حل المعادلة الخطية (Solution Of Linear Equation)

هناك ثلاث قضايا رئيسة عند مناقشة حل المعادلة التفاضلية الخطية $L(y) = f$ :

(i) وجود الحل .

(ii) وحدانية الحل .

(iii) شكل الحل .

أما وجود الحل فإليك النظرية التالية :

**نظرية 2.1** : إذا كان $f\ ,\ a_n , a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots, a_0$ اقترانات متصلة على فترة I تحوي النقطة $x_0$ فإن المعادلة :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\, y = f$$

لها حل في الفترة I .

أما وحدانية الحل فالجواب عليه في النظرية التالية :

**نظرية 2.2** : إذا كان $f\ ,\ a_n , a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots, a_0$ اقترانات متصلة على فترة I تحوي النقطة $x_0$ فإن المعادلة :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\, y = f$$

لها حل وحيد على الفترة I يحقق الشروط

$$y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_1 , \cdots\cdots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

حيث $y_1 , \cdots\cdots , y_{n-1}$ هي أعداد حقيقية .

أما برهان نظرية 2.1 فذلك جزء من مادة نظرية المعادلات التفاضلية والتي تحتاج دراستها إلى أدوات من التحليل المتقدم ، وهذه ليست من مهمة هذا الكتاب .

أما برهان نظرية 2.2 فنترك هذا لك هدية من عند أنفسنا .

والآن كيف نحل المعادلة $L(y) = f$ ؟ ماهو شكل الحل ؟

إليك البيان :

(1) إن حلول المعادلة $L(y) = 0$ هي تلك الاقترانات التي تنتمي إلى مفني المؤثر L .
وكما سبق في الوحدة الأولى من هذا الكتاب ، فإن مفني L هو متجه فضائي . ومفني L في

هذه الحالة يسمي فضاء الحلول .

وبعد فضاء الحلول يعتمد على L .وسوف نسرد عليك النظرية التالية دون برهان :

**نظرية 2.3** : إذا كان $L = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots\cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ وكانت $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots, a_0$ اقترانات متصلة على فترة I ، فإن مفني L في $C^{n+1}[I]$ هو متجه فضائي ذو بعد n ، بشرط أن يكون $a_n(x) \neq 0$ لكل x في I .

وإذا كان $E = \{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ هي أساس لمفني L ، فإن E تسمى مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ وفي تلك الحالة فإن أي حل للمعادلة $L(y) = 0$ هو من الشكل $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$ ، أي أنه ينتمي لمولد E .

إنَ الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ هو بالشكل

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$$

حيث $\{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ هى مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ .

هل تعلم لماذا استخدمنا الرمز $y_h$ ؟

هو رمز الحل العام للمعادلة المتجانسة (homogenous) $L(y) = 0$ .

(2) لنفرض أن z هو أي حل يحقق المعادلة $L(y) = f$ . وفي هذه الحالة

$$L(y_h + z) = L(y_h) + L(z)$$
$$= 0 + f = f$$

أي أن $y_h + z$ هو حل للمعادلة $L(y) = f$ . وهذا الحل يحتوي على n من الثوابت .

والحل z هو حل خاص للمعادلة $L(y) = f$ ، ولذلك سوف نرمز له بالرمز $y_p$ (particular solution) . وعليه :

**نظرية 2.4** : إن الحل العام $y_g$ للمعادلة $L(y) = f$ هو $y_g = y_h + y_p$ حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ و $y_p$ هو حل خاص للمعادلة $L(y) = f$ .

أما كيف نجد $y_h$ , $y_p$ فإن ذلك مهمة البنود المتتالية والوحدة الرابعة . وسوف نعرض التفصيل وفق مرتبة المعادلة ومعاملات L . فإلى ذلك ندعوك .

# مسائل

الوحدة الثالثة

بند(2)

1- إذا كان $L(y)=x^2y''+y$

جد $L(\sin x)$ , $L(e^{2x})$ .

2- إذا كان $L(y)=2y''-e^xy'+xy$

جد $L(x^3)$ , $L(\cos x)$ .

3- برهن أن $y_1=e^{2x}$ , $y_2=e^{-x}$ هما حلان أساسيان للمعادلة $y''-y'-2y=0$ ، ثم جد حلا خاصا لهذه المعادلة يحقق الشروط $y(0)=-1$ , $y'(0)=4$ .

4- أي من المعادلات التالية تنطبق عليها نظرية2.2 :

(a) $(1+x^2)y''+xy'-y=\tan x$ , $y(1)=y'(1)=a$

(b) $x^2y''+xy'+y=\cos x$ , $y(0)=y'(0)=0$

(c) $e^xy''-\dfrac{y'}{x-3}+y=\ln x$ , $y(1)=y'(1)=b$

(d) $y''+xy'-x^2y=0$ , $y(0)=0, y'(0)=1$

(e) $(1-x)y''+xy'-2y=\sin x$ , $y(0)=y'(0)=1$

### 3- المعادلات الخطية من المرتبة الأولى (First Order Linear Equations)

هذه معادلات من الشكل :

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f$$

ومن الشرط $a_1(x) \neq 0$ لكل x في الفترة I ، فإن المعادلة يمكن كتابتها بالشكل :

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو $y_g = y_h + y_p$ وفق نظرية2.4 .

أما $\underline{y_h}$ :

نأخذ المعادلة

$$y' + p(x)y = 0$$

ومنه

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

إذن

$$y_h = c_1 e^{-\int p(x)\,dx}$$

أما $\underline{y_g}$ :

نضرب طرفي المعادلة في $e^{\int p(x)\,dx}$ لنحصل على

$$e^{\int p(x)\,dx}\left[y' + p(x)y\right] = e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)$$

ومنه

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int p(x)\,dx}\right] = e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)$$

وهذا يعطينا

$$y_g = e^{-\int p(x)\,dx}\left[c_1 + \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx\right]$$

وعليه فالحل العام هو :

$$\boxed{y_g = e^{-\int p(x)\,dx}\left[c_1 + \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx\right]}$$

والآن لنرطب لك الجو ببعض الامثلة.

**مثال(1)** : حل المعادلة $2y'+3y=e^{-x}$ .

**الحـــل** : هنا $p(x)=\frac{3}{2}$ ,  $Q(x)=\frac{e^{-x}}{2}$ .

وعليه

$$y_g = e^{-\int \frac{3}{2}dx}\left[\int e^{\int \frac{3}{2}dx}\cdot\frac{e^{-x}}{2}dx + c_1\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x}\left[\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}dx + c_1\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x}\left[e^{\frac{x}{2}} + c_1\right]$$

$$= c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-x}$$

**مثال(2)** : حل المعادلة $(x^2+1)y'-2xy=x^2+1$ .

**الحـــل** : هنا $p(x)=\frac{-2x}{1+x^2}$ ,  $Q(x)=1$ .

وعليه

$$y_g = e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}dx}\left[\int e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}dx}\cdot 1\,dx + c_1\right]$$

وحيث أن

$$\int \frac{-2x}{1+x^2}dx = -\ln(1+x^2)$$

$$y_g = e^{\ln(1+x^2)}\left[\int e^{-\ln(1+x^2)}dx + c_1\right]$$

$$= \left[1+x^2\right]\left[\int \frac{1}{1+x^2}dx + c_1\right]$$

$$= \left[1+x^2\right]\tan^{-1}(1+x^2) + c_1(1+x^2)$$

سنكتفي بهذا القدر من الأمثلة ونتركك مع المسائل تعالجها بنفسك إذ نريد أن نتابع سيرنا إلى وحدة أخرى نتعرف فيها على المزيد من المعادلات .

# مســائــل

**الوحدة الثالثة**

**بند(3)**

1 – حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' + y = x$

(2) $y' + \frac{1}{x+1} y = \frac{\cos x}{x+1}$

(3) $y' + y = e^{x}$

(4) $\frac{1}{x} y' + 2y = 2x^{2}$

(5) $(\cos x)y' + (\sin x)y = x$

(6) $y' - 2xy = 1$

(7) $xy' + y = x\cos x$

(8) $y' - 8y = e^{x}$

(9) $y' - \frac{2}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$

(10) $y' + 2xy = 2x$

(11) $y' + \left(2 + \frac{1}{x}\right) y = 2e^{-2x}$

(12) $(1 + x^{2})y' + 4xy = x$

## 3- معادلة برنولي (Bernolli`s Equation)

إن معادلة برنولي معادلة من الدرجة الأولى ليست خطيَة . لكننا نستطيع تحويلها إلى معادلة خطية . أما كيف يتم ذلك فإليك البيان .

إن الشكل العام لمعادلة برنولي هو :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

حيث $n$ عدد حقيقي . فإذا كان $n = 0$ أو $n = 1$ فإن المعادلة هي معادلة خطية ولا جديد لدينا .

ونلاحظ أيضاً أن $y = 0$ هو حل للمعادلة(1) .

أما طريقة تحويل المعادلة(1) إلى معادلة خطية فإننا نكتب (1) على الشكل

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

فارضين أن $y \neq 0$ .

نضع الآن $u = y^{1-n}$ . نفاضل بالنسبة لـ $x$ لنحصل على :

$$\frac{du}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

وتصبح المعادلة(2) على الشكل :

$$\frac{1}{n-1} \frac{dy}{dx} + P(x)\, u = Q(x)$$

وهي خطية من المرتبة الأولى في المتغير $u$ .

نحلها فنجد $u$ ثم نعوض $u = y^{1-n}$ .

هل تريد أن نحل لك مثالاً . إليك ذلك .

**مثال(1)** : حل المعادلة $y' + y = (xy)^2$ .

**الحـــل** : هذه معادلة برنولي لأنها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$$

وعليه $n = 2$ . نضع $u = \frac{1}{y}$ ومنه $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\, y'$ . تصبح المعادلة على الشكل :

$$\frac{du}{dx} - u = -x^2$$

وهي خطية . نحلها بطريقة البند السابق لنجد أن :

$$u = 2 + 2x + x^2 + ce^x$$

وعليه $y = \frac{1}{u} = \frac{1}{2 + 2x + x^2 + ce^x}$ .

نختتم هذا البند بتحذيرك من أن معادلة برنولي التي أوردناها هي برنولي في y . وهذا يعني أنها قد تكون برنولي في x من مثل

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q(y)\, x^n$$

والطريقة هي نفسها . هل دهشت من ذلك ؟ .

---

## مســائــل

### الوحدة الثالثة

**بند(4)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' + \sqrt{x}\, y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}$

(2) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 y^3}$

(3) $x^2 y' + y^2 - xy = 0$

(4) $xy' - (1_ + x)y - y^2 = 0$

(5) $y' + \frac{2y}{x} = -x^9 y^5$

(6) $y' + y = 2x^2 y^2$

(7) $yy' + xy^2 - x = 0$

(8) $2yy' + y^2 \sin x - \sin x = 0$

(9) $xy' - \frac{y}{2\ln x} - y^2 = 0$

(10) $y' - y + xe^{-2x} y^3 = 0$

2- حل المعادلة :

$$y(x) + \int_0^x y(t)\,dt = x$$

3- حل المعادلة :

$$y(x) + 2\int_0^x t\,y(t)\,dt = x^2$$

---

## 4- المعادلات الخطية من المرتبة الثانية ورونسكي الحلول .

## (Second Order Linear Equations And The Wronskian)

سنعالج في هذا البند المعادلات من الشكل :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \cdots\cdots (*)$$

وحيث أن هذه المعادلة من المرتبة الثانية فإن فضاء الحلول ثنائي البعد ،وأن أساس الفضاء مجموعة : $E = \{y_1 \ , y_2\}$ وإيجاد حل لهذه المعادلة ليس أمر سهلا في الحالة العامة . ولكن باستخدام رونسكي الحلول ، يمكننا معرفة $y_2$ إذا عرفنا $y_1$. هذه هي قضية هذا البند .

إن مفهوم رونسكي لمجموعة من الاقترانات قد مر بنا في الوحدة الأولى . والسؤال هنا : هل يمكن معرفة $\mathbf{W}[y_1, y_2]$ دون معرفة $y_1 \ , y_2$ في حالة كانت $E = \{y_1 \ , y_2\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة (*) ؟ .

والجواب يكمن في النظرية التالية :

**نظرية 5.1** : إذا كانت $E = \{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_0 y = 0$$

فإن رونسكي الحلول هو :

$$\mathbf{W}[y_1, \cdots\cdots, y_n](x) = ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$$

حيث c ثابت غير صفري .

**البرهان** : سنبرهن هذه النظرية فقط في حال $n = 2$ .

وعليه معادلتنا هي :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

وأساس فضاء الحلول هي المجموعة $E = \{y_1 \ , y_2\}$ .

دعنا نكتب $\mathbf{W}(x)$ بدلا من $\mathbf{W}[y_1, y_2](x)$ .

والآن

$$\frac{d\mathbf{W}}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x)$$

$$= y_1(x)\left[-a_1(x)y_2'(x) - a_0(x)y_2(x)\right]$$

$$= -y_2(x)\left[-a_1(x)y_1'(x) - a_0(x)y_1(x)\right]$$

$$= -a_1(x)\left[y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_2(x)\cdot y_1'(x)\right]$$

$$= -a_1(x)\,\mathbf{W}(x)$$

ومنه

$$\frac{d\mathbf{W}}{\mathbf{W}} = -a_1(x)\ dx$$

أو

$$\ln \mathbf{W} = -\int a_1(x)\,dx + b$$

وعليه

$$\mathbf{W} = e^{b}\cdot e^{-\int a_1(x)dx} = ce^{-\int a_1(x)dx}$$

هل تتفق معنا أن هذا ينهي البرهان ؟ لا بد لك من ذلك .

والآن : هل هناك فائدة لهذه النظرية ؟

الجواب : نعم تعطينا الحل الثاني إن عرفنا الحل الأول .

وإليك التفصيل :

**نظرية 5.2 :** إذا كان $y_1$ حلا للمعادلة $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ وكان $y_1(x) \neq 0$ لكل $x$ في الفترة $\mathbf{I}$ ، فإن $y_2 = y_1(x)\int \frac{W(x)}{y_1^2(x)}\,dx$ حل ثاني على الفترة $\mathbf{I}$ وتكون المجموعة $B = \{y_1\ ,\ y_2\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة على الفترة $\mathbf{I}$ .

**البرهان :** من النظرية 5.1 السابقة لدينا $\mathbf{W} = ce^{-\int a_1(x)dx}$ على الفترة $\mathbf{I}$ .

ومن هذا نحصل على :

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = ce^{-\int a_1(x)dx}$$

وحيث $y_1(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbf{I}$ فإن :

$$y_2' - \left(\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) y_2 = c\ \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1}$$

وهذه معادلة خطية في $y_2$ . ومن البند الثالث نحصل على حل خاص لها بالشكل :

$$y_2 = e^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx} \left[ e^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx}\ c\ \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1(x)} \right]$$

وحيث $c \neq 0$ ، يمكننا أن نختار $c = 1$ لنحصل على

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)}\, dx$$

وهذا ينهي برهان النظرية .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : جد حلا ثانيا في أساس فضاء الحلول للمعادلة $y'' + (\tan x - 2\cot x) y' = 0$

إذا كان $y_1 = 1$ .

**الحل** : وفق قانون الحل الثاني فإن

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

وفي حالتنا $a_1(x) = \tan x - 2\cot x$ ، وفيه

$$\begin{aligned} e^{-\int a_1(x)\,dx} &= e^{-\int \tan x\,dx + 2\int \cot x\,dx} \\ &= e^{\ln(\cos x) + 2\ln(\sin x)} \\ &= \cos x \cdot \sin^2 x \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} y_2 &= \int \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{1}\, dx \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} \end{aligned}$$

**مثال(2)** : جد حلا ثانيا في أساس فضاء الحلول للمعادلة :

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

إذا كان على الفترة $y_1 = x$ على الفترة $(0, \infty)$ .

**الحـــل :**

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

$$= x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x}dx}}{x^2} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x} dx$$

$$y_2 = x \ln x$$

ونقف هنا كي نستأنف مسيرتنا في بند جديد .

# مســائــل

**الوحدة الثالثة**

**بند(5)**

1- جد رونسكي الحلول الأساسية للمعادلات التالية :

(1) $x^2y''+xy'+(x^2+1)y=0 \quad , y_1(0)=0, y_1'(1)=1, y_2(1)=y_2'(1)=1$

(2) $x^2y''-3xy'+y=0 \quad , y_1(-1)=y_1'(-1)=2, y_2(-1)=0, y_2'(-1)=-1$

(3) $y''-(\sin x)y'+3(\tan x)y=0 \quad , y_1(0)=1, y_1'(0)=0, y_2(0)=0, y_2'(0)=1$

2- جد حلا ثانيا أساسيا للمعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y''-2y'+y=0 \quad , y_1=e^x$

(2) $y''-4y'+4y=0 \quad , y_1=e^{2x}$

(3) $y''+(\tan x)y'-6(\cot^2 x)y=0 \quad , y_1=\sin^3 x$

(4) $3xy''-y'=0 \quad , y_1=1$

(5) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad , y_1=x$

(6) $(1-x^2)y''-2xy'=0 \quad , y_1=1$

(7) $2xy''-e^xy'=0 \quad , y_1=1$

3- برهن أن $y_1=y_1(x)$ و $y_2=y_1(x)\int \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} a_1(\theta)d\theta}}{y_1^2(t)}dx$

والواردين في نظرية 5.2 مستقلان خطيا .

---

## 6- حدوديات مؤثر التفاضل (Polynomials In D)

هذا بند مهم لأنه سيسهل علينا لغة الكتابة في الوحدة الرابعة وما يليها . فلنبدأ في موضوعنا مباشرة .

| **اصطلاح على رمز :** |
|---|
| سوف نكتب $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}\ ,\ D^{n-1} = \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\ , \cdots\cdots ,\ D = \dfrac{d}{dx}$ |

وليس بالأمر الصعب أن ترى بنفسك أن $D^n\ ,\ D^{n-1}\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ D$ هي مؤثرات خطية على الفضاءات $C^n[a,b]\ ,C^{n-1}[a,b]\ ,\cdots\cdots,\ C^1[a,b]$ حيث :

$C^k[a,b] = \{ f \in C[a,b]\ :\ $ $f^{(n)}(x)$ موجود ومتصل على $[a,b]\ \}$

ونستطيع أن نكون حدوديات من النمط :

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 D + a_0 I$$

حيث $a_n , a_{n-1} , \cdots\cdots , a_1 , a_0$ ثوابت أو اقترانات في $x$ . ومن الأمثلة على ذلك :

$$\text{(i)}\quad P(D) = D^2 - 2D + I$$

$$\text{(ii)}\quad P(D) = x^2D^2 + 3xD - 5I$$

$$\text{(iii)}\quad P(D) = D^4 - e^xD + \sin x\ I$$

وكل هذه حدوديات في $D$ .

وهنا يقفز سؤالان إلى ذهن القارئ والكاتب وهما :

(1) هل نستطيع تحليل الحدودية إلى عوامل أولية كما في حالة الحدوديات العادية ؟

(2) إذا كان $(a_1D + b_1)$ , $(a_2D + b_2)$ عاملين من عوامل $P(D)$ فهل $(a_2D + b_2)\cdot(a_1D + b_1) = (a_1D + b_1)\cdot(a_2D + b_2)$ ؟

حيث $P_1(D)P_2(D)y = P_1(D)[P_2(D)y]$ .

والأجوبة على مثل هذين السؤالين مفيدة بواقع عوامل الحدودية $P(D)$ .

ولنباشر الإجابة على ما هو أسهل .

| **نظرية 6.1 :** إذا كان $P_1(D)$ , $P_2(D)$ حدوديتين في $D$ ذواتي عوامل ثابتة فإن : $P_1(D)P_2(D) = P_2(D)\ P_1(D)$ |
|---|

**البرهان :** ليس هناك من شيء نبرهنه . فأولا نلاحظ أن

$$D^iD^jy = D^jD^iy = y^{(i+j)}$$

وثانيا : إذا كان $P_1(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \quad , \quad P_2(D) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i$ فإن :

$$P_1(D)P_2(D) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j D^i D^j$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_j D^i D^j$$

$$= P_2(D)P_1(D)$$

وهذا ينهي البرهان .

ولنرميك بسهم بعض الأمثلة كي يستبين لك الأمر :

**مثال(1) :** جد $P_1(D)P_2(D)$ إذا كان :

$$P_2(D) = D-4 \quad , \quad P_1(D) = 2D+1$$

**الحـــل :**

$$(2D-1)(D-4)y = (2D-1)(y'-4y)$$

$$= 2D(y'-4y)+(y'-4y)$$

$$= 2y''-8y'+y'-4y$$

$$= 2y''-7y'+4y$$

$$= (2D^2-7D-4)y$$

وعليه $P_1(D)P_2(D) = 2D^2-7D-4$

وقبل أن نستمر في الأمثلة ، نسجل لك الملاحظة التالية :

> **ملاحظة 6.1 :** في عملية ضرب (تركيب) الحدوديتين $P_1(D)$ , $P_2(D)$ فإننا نلاحظ ما يلي:
> نقوم بضرب الحدوديتين $P_1(t)$ , $P_2(t)$ ضربا عاديا ، كما تعلمناه في الحسبان .
> فإذا كان $P_2(t)\ P_1(t) = P_3(t)$ فإن $P_2(D)\ P_1(D) = P_3(D)$ .

والآن إلى مثال آخر :

**مثال(2) :** جد $P(D)P(D)$ إذا كان :

$$P\ D = D\ -D+1 \qquad P\ D = D+1$$

**الحـــل :** $(r^2 - r + 1)(r+1) = r^3 + 1$

إذن $P_1(D)P_2(D) = D^3 + 1$

والآن ماذا عن تحليل الحدودية $P(D)$ .

سنخبرك بما لم تحط به خبرا :

---

**نظرية 6.2:** إذا كان $P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

وكان $P(t) = (b_1 t + c_1)(b_2 t + c_2)\cdots\cdots(b_n t + c_n)$ هو محلل $P$ إلى عواملها الأولية فإن $P(D) = (b_1 D + c_1)(b_2 D + c_2)\cdots\cdots(b_n D + c_n)$ .

---

وليس هناك ما نبرهنه. فنظرية 6.1 مع الملاحظة 6.1 مع الحقيقة المعروفة أن كل حدودية تحلل إلى حدوديات من الدرجة الأولى ( لنظرية الأساسية في الجبر ) تخرج لنا البرهان صافيا يسر القارئين .

وإن أردت أمثلة :

**مثال(3) :** $D^2 + 2D - 3 = (D+3)(D-1)$

**مثال(4) :** $D^2 + 1 = (D+i)(D-i)$

**مثال(5) :**

$$\begin{aligned} D^3 + 3D^2 - D - 3 &= (D^3 - D) + (3D^2 - 3) \\ &= D(D^2 - 1) + 3(D^2 - 1) \\ &= (D+3)(D^2 - 1) \\ &= (D+3)(D-1)(D+1) \end{aligned}$$

والآن ماذا لو كانت عوامل الحدودية غير ثابتة ؟

هل تبقى الخاصية الإبدالية لعملية الضرب (التركيب ) قائمة ؟

والجواب على ذلك : لا !

ولكن قبل ذلك كيف نضرب حدوديتان من الدرجة الأولي ببعضهما إذا كانت العوامل غير ثابتة . والجواب :

$$
\begin{aligned}
Z &= \left(a_2 D + b_2\right)\cdot\left(a_1 D + b_1\right)y \\
&= \left(a_1 D + b_1\right)\left(a_2 y' + b_2 y\right) \\
&= \left(a_1 D\right)\left(a_2 y' + b_2 y\right) + b_1\left(a_2 y' + b_2 y\right) \\
&= a_1 \frac{d}{dx}\left(a_2 y'\right) + a_1 \frac{d}{dx}\left(b_2 y\right) + b_1 a_1 y' + b_1 b_2 y
\end{aligned}
$$

والآن

$$\frac{d}{dx}\left(a_2 y'\right) = a_2 y'' + a_2' y'$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}\left(b_2 y'\right) = b_2 y' + b_2' y$$

إذن

$$Z = a_1\left(a_2 y'' + a_2' y'\right) + a_1\left(b_2 y' + b_2' y\right) + b_1 a_1 y' + b_1 b_2 y$$

**فمثلا :**

$$
\begin{aligned}
(D+1)\left(xD + e^x\right)y &= (D+1)\left(xy' + e^x y\right) \\
&= D\left(xy'\right) + D\left(e^x y\right) + xy' + e^x y \\
&= xy'' + y' + e^x y' + e^x y + xy' + e^x y \\
&= xD^2 y + Dy + e^x Dy + e^x y + xDy + e^x y \\
&= \left(x^2 D^2 + D + e^x D + 2e^x + xD\right)y \\
&= \left(x^2 D^2 + \left(1 + x + e^x\right)D + 2e^x\right)y
\end{aligned}
$$

وعليه :

$$(D+1)\left(xD + e^x\right) = x^2 D^2 + \left(1 + x + e^x\right)D + 2e^x$$

أما أن الخاصية الإبدالية غير قائمة فإليك المثال التالي :

**مثال(6) :**

$$
\begin{aligned}
(D-1)\left(xD+1\right)y &= (D-1)\left(xy' + y\right) \\
&= D\left(xy' + y\right) - \left(xy' + y\right) \\
&= xy'' + y' + y' - xy' - y \\
&= \left(xD^2 + (2-x)D - 1\right)y
\end{aligned}
$$

أما

$$
\begin{aligned}
(xD+1)(D-1)y &= (xD+1)(y'-y) \\
&= xDy' - xDy + y' - y \\
&= xy'' - xy' + y' - y \\
&= \left(xD^2 + (1-x)D - 1\right)y
\end{aligned}
$$

هل لاحظت أن المقدارين مختلفين ؟ .

إذن نكتفي بهذا القدر لنرحل سويا لوحدة جديدة .

# مســائــل

**الوحدة الثالثة**

**بند(6)**

**1-** اكتب بشكل حدودية ثم جد التأثير على الاقتران المعطى :

(1) $(D+x)(xD+1) \quad , \sin x$

(2) $(D-3)(2D+1) \quad , e^{x}$

(3) $(2xD+e^{x})(\sin x\, D+x D^{2}) \quad , x^{3}$

(4) $(D^{2}+1)(\ln(x+1)D-e^{x}) \quad , x$

(5) $(D-1)(xD-x) \quad , 1$

2- حلل إلى العوامل الأولية المؤثرات التالية :

(1) $D^{2}-2$

(2) $D^{2}-\sqrt{3}D-6$

(3) $D^{3}+4D^{2}+5D+2$

(4) $D^{4}+1$

(5) $D^{4}-4D^{3}+D^{2}+6D$

3- اكتب المعادلات التالية بشكل حدودية مؤثرات :

(1) $y''+5xy'-e^{x}y=0$

(2) $y''-x^{2}y'+(\sin x)y=1$

(3) $e^{x}y''+y'+y=x$

# الوحدة الرابعة

## المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

" Linear Differential Equations Of Second Order "

في الوحدة الثالثة حاولنا معالجة حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية وذات المعاملات المتغيرة . أما في هذه الوحدة فسوف نقوم بالمعالجة التامة (وليس المحاولة فقط ) لحل المعادلات الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة سواء كانت المعادلة متجانسة أم غير متجانسة .

## 1- المعادلات الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

**(Homogenous Equations With Constant Coeficiants)**

في البند الثاني من الوحدة الثالثة بينا أن المعادلة :

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

لها n من الحلول الأساسية ، لنقل $y_1 , y_2 , \cdots\cdots , y_n$ حول نقطة ما ، وأن الحل العام $y_h$ هو من الشكل : $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$

إذن المعادلة :

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

لها حلان أساسيان $y_1 , y_2$ وأن الحل العام هو $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ .

| والسؤال هو كيف نجد $y_1$ و $y_2$ ؟ |
|---|
| وللإجابة على ذلك : |

أولاً نطلب منك اليقظة التامة فالأمر جد فصل وما هو بالهزل .

والآن نعيد كتابة المعادلة بطريقة المؤثر L على النحو التالي :

$$L(y) = \left(D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

وحيث أن L هو حدودية في D من الدرجة الثانية فإنه يمكن كتابة L بالشكل :

$$L = D^2 + a_1 D + a_0 = \left(D - r_2\right)\left(D - r_2\right) \cdots\cdots\cdots (2)$$

حيث $r_1 , r_2$ هما صفرا الحدودية :

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_0$$

وهنا لانريد أن نتعرض لواقع $r_1 , r_2$ هل هما حقيقيان أم مركبان ، متساويان أم غير متساويان ؟ لكننا نريد أن نقف عند شكل L المعطى في المتساوية (2) .

نلاحظ أن $L = L_2 \circ L_1$ حيث $L_1 = D - r_1$ و $L_2 = D - r_2$ . ومن خصائص حدوديات التفاضل ذات العوامل الثابتة نلاحظ أن $L = L_1 \circ L_2$ وعليه تصبح المعادلة(1) على الشكل

$$L_1 L_2 y = L_2 L_1 y = 0$$

من هذا نستنتج أن مفني $L_1$ فضاء جزئي من فضاء الحلول للمعادلة(1) وكذلك مفني $L_2$ فضاء جزئي من فضاء الحلول للمعادلة نفسها .

وعليه فإن عملية حل المعادلة(1) أصبحت هي عملية إيجاد مفني $L_1$ ومفني $L_2$ . بمعنى آخر إيجاد حلول المعادلتين $(D-r_2)y=0$ و $(D-r_1)y=0$ .ولكن حل $(D-r_1)y=0$ هو حل المعادلة $y'-r_1y=0$ . ومن الوحدة الثالثة ( أو مباشرة ) البند الثالث نجد أن الحل الأساسي هو $y=e^{r_1x}$ . وبالمثل $y=e^{r_2x}$ هو الحل الأساسي ل $y'-r_2y=0$ . وكل من هذين الحلين هو حل للمعادلة(1) .

وهنا نواجه عدة مشاكل :

(i) ماذا لو كان $r_1=r_2$ ؟ في هذه الحالة $e^{r_2x}=e^{r_1x}$ . إذا كيف نجد حلا أساسيا آخر ؟

(ii) ماذا لو كان $r_1 \neq r_2$ ولكن كلاهما مركب ؟ في هذه الحالة ماذا نعني ب $e^{r_1x}$ , $e^{r_2x}$ ؟

لا تخف ! سوف نجيب على هذه التساؤلات إجابة شافية في البنود التالية . ولكن قبل أن نترك هذا البند نلخص فكرته الأساسية في :

| |
|---|
| لحل المعادلة $y''+a_1y'+a_0y=0$ نجد جذور الحدودية $P(r)=r^2+a_1r+a_0$ ولنقل أنهما $r_1$ , $r_2$ . كل جذر يعطينا حلا أساسيا أسيا $y_1=e^{r_1x}$ , $y_2=e^{r_2x}$ مع وجود استثناء في حالة $r_1=r_2$ أو $r_1$ , $r_2$ أعداد مركبة . |

إذن إذا كان $r_1 \neq r_2$ فإن هذا نلخصه في النظرية التالية :

| |
|---|
| **نظرية 1.1** : لنفرض أن جذور المعادلة : $r^2+ar+b=0$ هما عددان حقيقيان $r_1$ , $r_2$ وأن $r_1 \neq r_2$ . فإن المعادلة $y''+ay'+b=0$ لها حلان أساسيان $y_1=e^{r_1x}$ , $y_2=e^{r_2x}$ وأن الحل العام هو : $$y_h=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$ |

وبرهان هذه النظرية هو ما أسلفناه في البند الأول من استخدام لمفني

. $L=(D-r_1)(D-r_2)$

عجبا ما أسهل هذا البند وما أقصره .

وحتى نطيل من قامة هذا البند نحل لك بعض الأمثلة .

**مثال(١)** : حل المعادلة $y''+2y'-3y=0$ .

**الحـــل** : نجد حلول المعادلة $r^2+2r-3=0$ .

وحيث أن $r^2+2r-3=(r+3)(r-1)$ ، فإن الحلول هي $r_2=1$ , $r_1=-3$ .

وعليه $y_1=e^{-3x}$ , $y_2=e^{x}$ ويكون بذلك الحل العام هو

. $y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

هل تريد أمثلة أخرى ؟

لن نجعلك تعتقد بأن الأمر سهل لهذه الدرجة . وسوف نقفز إلى بند آخر .

---

# مســـائـــل

**الوحدة الرابعة**

**بند (1)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y'' - y' - 6y = 0$      (2) $y'' - y' - 2y = 0$

(3) $y'' - 2y' + y = 0$      (4) $y'' - 2y' - 8y = 0$

(5) $y'' + 2y' - 8y = 0$      (6) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(7) $y'' - y' - 12y = 0$      (8) $y'' - 9y = 0$

(9) $y'' + y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$

(10) $y'' + 2y' - 10y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

(11) $y'' + 6y' + 9y = 0 \quad , \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$

(12) $12y'' + y' - y = 0 \quad , \quad y(0) = 4, y'(0) = 1$

2- جد المعادلات التفاضلية الخطية التي حلها العام :

(a) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

(b) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

(c) $y = c_1 + c_2 e^{-4x}$

(d) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

## 2- حالة الجذور حقيقية مكررة (Repeated Roots)

ماذا لو كانت جذور المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ مكررة ؟ إن نظرية 2.1 عاجزة عن إعطائنا حلين أساسيين إذ في هذه الحالة $y_1 = e^{r_1x} = e^{r_2x} = y_2$ . وعليه لا بد من البحث عن حل آخر مستقل خطيا عن $y_1$ .

والجواب نجده في :

> **نظرية 2.1 :** لنفرض أن المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ لها حل مكرر $r = r_1 = r_2$ . فإن المعادلة $y'' + ay' + b = 0$ لها حلان أساسيان هما $y_1 = e^{r_1x}$ و $y_2 = xe^{r_1x}$ ويكون الحل العام هو $y_h = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x}$ .

**البرهان :** من نظرية 2.1 فإن الجذر $r = r_1$ يعطينا حلا أساسيا هو $y_1 = e^{r_1x}$ . وحيث أن $r_2 = r_1$ فإنه لا بد من البحث عن طريقة أخرى لإيجاد $y_2$ . وهذه الطريقة هي استخدام نظرية 5.2 من الوحدة الثالثة والتي تعطينا قانون $y_2$ إذا عرفنا $y_1$ . وعليه فإن :

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-ax}}{(e^{r_1x})^2}\,dx$$

$$= e^{r_1x}\left[\int e^{-ax}\cdot e^{-2r_1x}\,dx\right]$$

ولكن $(r - r_1)^2 = r^2 + ar + b$ ومنه نحصل على $a = -2r_1$ .

إذن

$$y_2 = e^{r_1x}\left[\int e^{2r_1x}\cdot e^{-2r_1x}\,dx\right]$$

$$= e^{r_1x}\int dx = e^{r_1x}[x + c]$$

حيث $c$ هو أي ثابت . وبالتالي نستطيع أن نختار $c = 0$ .

ومنه $y_2 = xe^{r_1x}$ .

وسواء رضيت أم لم ترضى ، فإن هذا ينهي البرهان والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1) :** جد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + y = 0$ .

**الحـــل :** نجد حلول المعادلة $r^2 + 2r + 1 = 0$ .

وبسهولة نلاحظ أن الحلول هي $1 = r_1 = r_2$ .

إذن حسب نظرية 3.1 فإن $y_1 = e^x$ , $y_2 = xe^x$ .

ويكون الحل العام هو $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$ .

# مســـائـــل

**الوحدة الرابعة**

**بند (2)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y'' + 2y' + y = 0$

(2) $y'' = 0$

(3) $y'' + 6y' + 9 = 0$

(4) $y'' + 10y' + 25 = 0$

(5) $y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$

2- جد المعادلات التفاضلية التي حلها العام :

(1) $y = c_1 + c_2e^{x}$

(2) $y = c_1 + c_2x$

(3) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}$

(4) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{-x}$

---

## 3- حـالـة الجـذور المـركبة ( Complex Roots )

في هذا البند نعالج حل المعادلة $y'' + ay' + b = 0$ عندما يكون جذور المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ جذور مركبة .

وحتى نستطيع أن نستوعب الفكرة الرئيسية لمثل هذه الحالة نذكرك أولا بأنه إذا كان $z = \alpha + i\beta$ هو جذر للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فإن $\bar{z} = \alpha - i\beta$ هو الحل الآخر لتلك المعادلة . وإذا أردنا أن نتبنى نظرية 2.1 في شكل الحلين الأساسين ، فسيكون $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ , $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ . وإذا فرضنا أن قوانين الأسس صالحة للأعداد المركبة كما هي للأعداد الحقيقية فإن $y_1 = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta x}$ و $y_2 = e^{\alpha} \cdot e^{-i\beta x}$ .

ويبقى علينا أن نفهم : ماذا نعني ب $e^{i\beta x}$ ؟

هل تذكر منشور متسلسلة قوى الاقتران الأسي ؟

إنه :
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

ومنه نقول : إذا كان $\theta \in \mathbf{R}$ فإننا نكتب :

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots\cdots$$
$$= \left(1 - \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

وهذا القانون :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

يسمى قانون أويلر . من هنا نستنتج أن :

$$y_2 = e^{\alpha x}[\cos\beta - i\sin\beta] \;,\quad y_1 = e^{\alpha x}[\cos\beta + i\sin\beta]$$

وحيث أننا نتعامل مع اقترانات حقيقية فإننا نلخص الأفكار في :

**نظرية 3.1 :** لنفرض أن المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلان $r_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad r_2 = \alpha - i\beta$ . فإن المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ لها حلان أساسيان هما $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ، ويكون الحل العام هو :

$$y_h = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

هل تريد مثالا . لن نبخل عليك بذلك .

**مثال(١) :** حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

**الحـــل :** نجد حلول المعادلة $r^2 + 2r + 5 = 0$

والتي هي :

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2}$$
$$= -1 \pm 2i$$

وعليه فإن $y_1 = e^{-x}\cos 2x \quad , \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x$ .

ألا ترى سهولة الأمر . ولكن كن حذرا ، فإنا نسحب بك أكثر فأكثر إلى عمق بحر المعادلات .

# مســـائـــل

**الوحدة الرابعة**

**بند (3)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $9y'' + y = 0$

(2) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(3) $y'' + 16y = 0$

(4) $y'' + 4y' + 2y = 0$

(5) $y'' + 2y' + 4y = 0$

(6) $6y'' + y' - y = 0$

2- جد المعادلات التفاضلية الخطية التي حلها العام :

(1) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

(2) $y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \sin x$

(3) $y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x$

(4) $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$

(5) $y = c_1 e^{3x} \cos 3x + c_2 e^{3x} \sin 3x$

## 4- الحلول الخاصة : مبدأ التراكب (Particular Solutions - "Super position")

لنأخذ المعادلة :

$$y'' + ay' + by = f(x) \cdots\cdots\cdots (1)$$

في البند الثاني من الوحدة الثالثة قمنا بدراسة شكل الحل العام وشروط وجوده لمثل تلك المعادلة وانتهينا إلى النتيجة أن $y_g = y_h + y_p$ حيث $y_g$ هو الحل العام ، $y_h$ هو الحل العام للمعادلة $y'' + ay' + by = 0$ , $y_p$ هو حل خاص للمعادلة(1) .

أما في البنود السابقة لهذه الوحدة ، فقد قمنا بدراسة عملية إيجاد $y_h$ للمعادلة(1) .والغاية الآن هو ايجاد $y_p$ .

وفي هذا البند نعطي ملاحظات عامة حول $y_p$ .

أولاً نذكرك أن المعادلة(1) يمكن كتابتها بالشكل $L(y) = f$ حيث $L = D^2 + aD + b$ .

فإذا كان $y_p$ هو حل خاص للمعادلة(1) ، فإن $L(y_p) = f$ .

والآن إلى النظرية التالية :

**نظرية 4.1 :** إذا كان $y_{p_1}$ حلا خاصا للمعادلة $L(y) = f_1$ وكان $y_{p_2}$ حلا خاصا للمعادلة $L(y) = f_2$ ، فإن $y_{p_1} + y_{p_2}$ حل خاص للمعادلة $L(y) = f_1 + f_2$ .

**البرهان :**

$$L(y_{p_1} + y_{p_2}) = L(y_{p_1}) + L(y_{p_2})$$
$$= f_1 + f_2$$

وينتهي بذلك البرهان .

هل رأيت في حياتك برهانا أقصر من هذا ؟ .

والآن إلى ملاحظة أخرى على شكل نظرية ثم نتبع ذلك بعض الأمثلة .

**نظرية 4.2 :** إذا كان $y_p$ حلا خاصا للمعادلة $L(y) = f$ ، فإن $ky_p$ حلا خاصا للمعادلة $L(y) = kf$ .

**البرهان :** $L(ky_p) = kL(y_p) = kf$ .

وتم البرهان بحمد الله .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال (1)** : لنفرض $L = D^2 - D + 1$ . إذا كان $y_1 = \cos x$ حلا للمعادلة $L(y) = \sin x$ وكان $y_2 = \frac{e^{2x}}{3}$ حلا للمعادلة $L(y) = e^{2x}$ . جد حلا لكل من المعادلات التالية :

$$\text{(i)} \quad L(y) = \sin x - 3e^{2x}$$

$$\text{(ii)} \quad L(y) = 4\sin x + 18e^{2x}$$

**الحــــل** : (i) هنا $f = f_1 + f_2$ حيث $f_1(x) = \sin x$ و $f_2(x) = -3e^{2x}$ .
ومن المعطيات نعرف أن $L(\cos x) = f_1$ . وحيث أن $L(y_2) = e^{2x}$ فإنه وفق نظرية5.2 فإن $L(-3y_2) = -3e^{2x}$ ، إذن $L(-3y_2) = f_2$ .والآن نستخدم نظرية4.1 لنحصل على $L(y_1 - 3y_2) = f_1 + f_2$ .
إذن الحل المطلوب هو :

$$y = \cos x - 3\frac{e^{2x}}{3} = \cos x - e^{2x}$$

(ii) هنا $L(y) = f$ بحيث $f = f_1 + f_2$ حيث $f_1(x) = 4\sin x$ و $f_2(x) = 18e^{2x}$ .
ولكن $L(y_1) = \sin x$ فإن $L(4y_1) = 4\sin x$ ،
وكذلك $L(y_2) = e^{2x}$ يعطي $L(18y_2) = 18e^{2x}$ ،
وعليه

$$L(4y_1 + 18y_2) = 4\sin x + 18e^{2x}$$

إذن الحل المطوب هو :

$$y = 4\cos x + \frac{18\,e^{2x}}{3} = 4\cos x + 6e^{2x}$$

والسؤال الذي يطرح نفسه هو " كيف يمكن لنا أن نجد حلا ، خاصة لمعادلة غير متجانسة من الشكل $L(y) = f$ " ؟ .
والجواب نضعه لك في البنود التالية .

## مسائل

الوحدة الرابعة

**بند (4)**

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية إذا كان الحل الخاص كما هو معطى :

(1) $y'' - y = x \quad , \quad y_p = -x$

(2) $y'' + y' = 1 \quad , \quad y_p = x$

(3) $y'' - y' - 2y = 1 - 2x \quad , \quad y_p = x - 1$

(4) $y'' - 4y' + 3y = -2e^x \quad , \quad y_p = xe^x$

(5) $y'' + 2y' - 4y - 4\cos 2x = 0 \quad , \quad y_p = \sin 2x$

2- إذا كان $y_1 = \cos x$ حلا للمعادلة $y'' - y' + y = \sin x$ ، وكان $y_2 = \dfrac{e^{2x}}{3}$ حلا للمعادلة $y'' - y' + y = e^{2x}$ . جد الحل العام للمعادلات التالية :

(1) $y'' - y' + y = 5\sin x$

(2) $y'' - y' + y = \sin x - 3e^{2x}$

(3) $y'' - y' + y = 4\sin x + 18e^{2x}$

## 5- المعاملات غير المعينة ( Undetermined Coeficients )

في هذا البند نوضح الطريقة الأولى لإيجاد $y_p$ للمعادلة $L(y) = f$ .

هذه الطريقة صالحة فقط لأنواع معينة من الاقترانات f .

وأنواع الاقترانات f الصالحة لمثل هذه الطريقة يمكن حصرها على النحو التالي :

طريقة المعاملات غير المعينة صالحة للاقترانات f والتي من الشكل :

$$f(x)=\sum_{0}^{k} a_n x^n \ , \ f(x)=be^{ax} \ , f(x)=a\sin bx \ , f(x)=a\cos bx$$

أو أي اقتران نحصل عليه من هذه الاقترانات سواء عن طريق الجمع أو الضرب .

**مثال(1)** : عين أي الاقترانات التي تصلح لطريقة المعاملات غير المعينة :

$$f(x) = 3e^{x}\sin 2x + 1 \qquad (i)$$

$$f(x) = xe^{2x}\cos 3x + x^2 - 3 \qquad (ii)$$

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 - \sec x \qquad (iii)$$

**الحل** : (i) نلاحظ أن $f(x) = f_1 + f_2$ حيث $f_2$ حدودية و $f_1$ هو حاصل ضرب اقترانين من النوع المطلوب . وعليه فإن f يصلح لطريقة المعاملات غير المعينة .

(ii) f هنا أيضا حصلنا عليه من الأنواع الصالحة بالضرب والجمع . ولذلك فإن f يصلح لطريقة المعاملات غير المعينة .

(iii) هنا f لا يصلح لطريقة المعاملات غير المعينة لأن أحد مركباته : secx ، ليس من الأنواع الصالحة ولا نستطيع أن نحصل عليه من الأنواع الصالحة لا بضرب ولا بجمع .

والآن كيف نحصل على $y_p$ بطريقة المعاملات غير المعينة للمعادلة $L(y) = f$ .

والفكرة الأساسية لطريقة إيجاد $y_p$ هو أنه :

إذا كانت f حدودية فإن الاقتران الذي يؤثر عليه L لنحصل على حدودية يجب أن يكون حدودية . وكذلك إذا كان f اقترانا أسيا أو sinax أو cosax فإن الاقتران الذي يؤثر عليه L يجب أن يكون من نوع f ليخرج لدينا f .

والآن إلى التفاصيل . حيث سنعالج كل حالة على حدة ، فلنبدأ إذن .

**الحالة الأولى** : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$

قبل وضع شكل $y_p$ ، لا بد من حل المعادلة $L(y) = 0$ . فنجد الحلين الأساسين $y_1$ و $y_2$.

والآن :

| **القاعدة(1)** : إذا كان $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ ، فإن $y_p = x^s(b_n x^n + \cdots\cdots + b_1 x + b_0)$ حيث s هو أصغرعدد طبيعي بحيث لا يوجد حد من حدود $y_p$ يساوي $y_1$ أو يساوي $y_2$ . |
|---|

أما كيف نجد $b_n, b_{n-1}, \cdots\cdots, b_1, b_0$ ، فإننا نعوض $y_p$ في المعادلة $L(y_p) = f$ .هذا التعويض يعطينا حدوديتين متساويتين وبالتالي فإن المعاملات متساوية .

وإليك المثال التالي المبين لذلك الأمر :

**مثال(2)** : جد $y_p$ للمعادلة $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 3$ .

**الحـــل** : أولا نجد الحلين الأساسين للمعادلة $y'' - 2y' + 3y = 0$ :

المعادلة : $r^2 - 2r - 3 = 0$ لها حلان $r_1 = 3$ و $r_2 = -1$ .

وعليه $y_1 = e^{3x}$ و $y_2 = e^{-x}$ . وحيث أن $f(x) = x^2 - 3$ ، فإن :

$$y_p = x^s(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$

ونلاحظ هنا عدم تشابه الحلول الأساسية مع الحدوديات عامة فإننا نختار $s = 0$ ، ويكون

$$y_p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

نعوض في المعادلة $L(y) = f$ لنحصل على :

$$y_p'' - 2y_p' + 3y_p = x^2 - 3$$

ومنه

$$2b_2 - 2(b_1 + 2b_2 x) + 3(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = x^2 - 3$$

أي :

$$(2b_2 - 2b_1 + 3b_0) + (3b_1 - 4b_2)x + 3b_2 x^2 = x^2 - 3$$

والآن نساوي المعاملات لنحصل على :

$$2b_2 - 2b_1 + 3b_0 = -3$$
$$3b_1 - 4b_2 = 0$$
$$3b_2 = 1$$

ومنه $b_2 = \frac{1}{3}$ ، $b_1 = \frac{4}{9}$ ، $b_0 = \frac{-25}{9}$ .

إذن $y_p = \frac{-25}{9} + \frac{4}{9}x + \frac{1}{3}x^2$

**<u>الحالة الثانية</u>** : $f(x) = a\,e^{bx}$

وفي هذه الحالة كالحالة السابقة يكون $\boxed{y_p = \lambda x^s e^{bx}}$

حيث $\lambda$ ثابت يراد تعيينه و $s$ هو أصغر عدد طبيعي لا يوجد تشابه بين $y_p$ والحلول الأساسية لـ $L(y) = 0$ .

ونعرض عليك المثال التالي :

**مثال(3)** : جد $y_p$ للمعادلة $y'' + y' = 3e^{-x}$ .

**الحــــل** : نجد أولا $y_1$ ، $y_2$ . وحيث أن حلول المعادلة $r^2 + r = 0$ هي $r = 0$ ، $r = -1$ ، فإن $y_1 = e^{0x} = 1$ ، $y_2 = e^{-x}$ .

والآن $y_p = \lambda x e^{-x}$ فإذا أخذنا $s = 0$ ، فإن $y_p$ يشابه $y_2$ (أي أن $y_p = \lambda y_2$ ) .

وإذا اخترنا $s = 1$ ، فإن $y_p$ لا يشابه أيا من الحلين الأساسيين .

وعليه $y_p = \lambda x^s e^{-x}$ . نعوض الآن في المعادلة لنحصل على :

$$y_p'' + y_p' = 3e^{-x}$$

ومنه

$$\lambda\left[-2e^{-x} + xe^{-x}\right] + \lambda\left[e^{-x} - xe^{-x}\right] = 3e^{-x}$$

نبسط لنحصل على

$$-\lambda e^{-x} = 3e^{-x}$$

وعليه $-\lambda = 3$ . ويكون بذلك $y_p = 3e^{-x}$ .

**<u>الحالة الثالثة</u>** : $f(x) = a\sin bx$

هذه الحالة تشمل أيضا فيما إذا كان $f(x) = a\cos bx$، إذ أن الفكرة واحدة وشكل $y_p$ واحد.

في مثل هذه الحالة يكون

$$\boxed{y_p = x^s(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)}$$

حيث نختار s بحيث لا تشابه بين حدود $y_p$ وأي من $y_1$ أو $y_2$ ويكون s أصغر عدد طبيعي يحقق ذلك .

ولنأخذ مثالا يبين ذلك :

**مثال(4)** : جد $y_p$ للمعادلة $y'' - y = 10\cos 2x$ .

**الحـــل** : حسب الحالة الثالثة فإن شكل $y_p$ هو :

$$y_p = x^s(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

حيث a , b ثوابت يراد تعيينها . أما s فإننا نختارها بحيث لا تشابه بين حدود $y_p$ والحلول الأساسية لـ $L(y) = 0$ .

وفي حالتنا : $y_1 = e^{-x}$ , $y_2 = e^{x}$ . وعليه إذن $s = 0$ ،

إذن $$y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$$

نعوض لنحصل على :

$$y_p'' - y_p = 10\cos 2x$$

إذن

$$(-4a\cos 2x - 4b\sin 2x) - (a\cos 2x + b\sin 2x) = 10\cos 2x$$

نبسط لنحصل على :

$$-5a\cos 2x - 5b\sin 2x = 10\cos 2x$$

نساوي المعاملات المتقابلة لنحصل على : $-5b = 0$ ، $-5a = 10$

إذن $a = -2$ ، $b = 0$ .

ومنه $y_p = -2\cos 2x$ .

والآن إلى الحالة العامة :

<u>الحالة العامة</u> : $f(x) = p(x)e^{ax}\cos bx + q(x)e^{ax}\sin bx$

حيث p , q حدوديات في x .

في هذه الحالة يكون $y_p$ من الشكل :

$$y_p = x^s e^{ax}\left[\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right)\cos bx + \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0\right)\sin bx\right]$$

حيث n هو أعلى الدرجتين للحدوديتين q , p أما s فهو ضابط عدم التشابه كما سلف في الحالات السابقة . والعوامل $a_n, \cdots\cdots, a_1$ ، $b_n, \cdots\cdots, b_1$ يراد تعيينها ، ويتم ذلك عن طريق التعويض في $L(y) = f$ ، ثم نساوي معاملات الاقترانات المتشابهة على طرفي المعادلة .

ولنأخذ الآن مثالا عاما :

**مثال(5)** : جد شكل $y_p$ للمعادلات التالية :

$$\text{(i)} \quad y'' - 4y' + 4y = 2xe^{2x} + x^2 \sin x$$

$$\text{(ii)} \quad \left(D^2 + 2D + 2\right)y = 3xe^{-2x} \cos 5x$$

**الحـــل** : (i) هنا $f = f_1 + f_2$ وعليه وفق قاعدة التراكب فإن $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ .

ولإيجاد شكل $y_{p_1}$ , $y_{p_2}$ لا بد من إيجاد $y_1$ , $y_2$ ،الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ .

وحيث أن $r^2 - 4r + 4 = 0$ لها الحلان $r_1 = r_2 = 2$ ، فإن $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = xe^{2x}$ .

والآن $f_1(x) = 2xe^{2x}$ ، وعليه يكون شكل $y_{p_1}$ هو :

$y_{p_1} = x^s(ax + b)e^{2x}$ . ونريد تعيين s لضمان عدم التشابه .

نلاحظ هنا أن $s = 0$ ، $s = 1$ تعطينا تشابه بين حدود $y_{p_1}$ وبين الحلول الأساسية : إذ أن $s = 0$ يعطينا $y_{p_1} = axe^{2x} + be^{2x}$ وهو ليس سوى $ay_2 + by_1$ .

وكذلك $s = 1$ يعطينا $y_{p_1} = ax^2e^{2x} + bxe^{2x}$ .فيكون الحد الثاني من $y_{p_1}$ مشابه للحل $y_2$. أما $s = 2$ فإنه يعطينا $y_{p_1} = ax^3e^{2x} + bx^2e^{2x}$ ولا تشابه مع الحلول الأساسية وعليه فإن شكل $y_{p_1}$ هو : $y_{p_1} = x^2(ax + b)e^{2x}$ .

لنعد الآن إلى $f_2$ . حيث أن $f_2 = x^2 \sin x$ ، فإن :

$$y_{p_2} = x^s\left(ax^2 + bx + c\right)\left(d\sin x + e\cos x\right)$$

أما s فإن وجود sinx و cosx ألغى وجود تشابه بين حدود $y_{p_2}$ وبين الحلول الأساسية والتي هي اقترانات أسية . وعليه $s = 0$ ويكون شكل $y_{p_2}$ النهائي هو :

$$y_{p_2} = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(d\sin x + e\cos x\right)$$

والذي يمكن إعادة كتابته بالشكل:

$$y_{p_2} = (a_1x^2 + b_1x + c_1)\sin x + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\cos x$$

ويكون الحل النهائي هو :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

(ii) أولا نجد الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ .

والمعادلة $r^2 + 2r + 2 = 0$ لها الحلان :

$$r_1 = \frac{-2+\sqrt{4-8}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-2-\sqrt{4-8}}{2}$$

أي أن $r_1 = -1+i \quad , \quad r_2 = -1-i$ .

إذن $y_1 = e^{-x}\cos x$ و $y_2 = e^{-x}\sin x$ .

والآن $f = 3xe^{-2x}\cos x$ ومنه نحصل على شكل $y_p$ على النحو التالي :

$$y_p = x^s(a_1x + b_1)\ e^{-2x}(a_2\cos 5x + b_2\sin bx)$$

ونلاحظ أن $s = 0$ يعطينا عدم التشابه بين أي من حدود $y_p$ وبين $f$ وعليه وبعد إعادة الصياغة يمكن كتابة $y_p$ على النحو :

$$y_p = (c_1x + c_2)\ e^{-2x}\cos 5x + (c_3x + c_4)\ e^{-2x}\sin 5x$$

يا له من مثال طويل . أتعبنا وأتعبك .

أتعبنا كتابة وأتعبك قراءة . إذن ننهه هذا البند بسلام وننتقل إلى بند آخر .

# مســـائــل

**الوحدة الرابعة**

**بند (5)**

1 – حل المعادلات التفاضلية التالية(الحل العام ) :

(1) $y'' + 2y' + y = 5 + x$

(2) $3y'' + 2y' - y = 2\sin x$

(3) $y'' + y = \cos x$

(4) $4y'' + 3y' - y = 25 - x^2$

(5) $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \sin x$

(6) $y'' - y' + 2y = x^2 - 8e^{2x}$

(7) $9y'' - y = x\sin x$

(8) $y'' + y' - 6y = 6(x + 1)$

(9) $y'' + y' = 2x + 3e^x$

(10) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \sin 2x)$

2– جد شكل الحل الخاص للمعادلات التالية :

(1) $y'' - 4y' + 4y = x\left(2e^{2x} + x\sin x\right)$

(2) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3xc^{2x}\cos 5x$

(3) $y'' + y = \sin x + x\cos x + 10^x$

(4) $y'' - y' = c^{2x} + xe^{2x} + x^2 c^{2x}$

(5) $y'' - y' - 2y = c^x \cos x - x^2 + x + 1$

---

## 7- طريقة تغير الوسطاء ( Variation Of Parameters )

في هذا البند مسألة إيجاد $y_p$ للمعادلة :

$$y'' + ay' + by = f \quad \cdots\cdots(1)$$

بطريقة لا يقيدها شكل $f$ . وملخص هذه الطريقة :

| |
|---|
| (1) نجد الحل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حيث $c_1 \ , \ c_2$ هي ثوابت عامة . |
| (2) نضع $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ . فجعلنا بذلك $y_p$ له شكل $y_h$ سوى أن العوامل $c_1 \ , \ c_2$ هي الآن اقترانات في $x$ . وهذا ما يفسر الإسم " تغير الوسطاء " . |
| (3) نعوض : $y_p'' + a y_p' + b = f$ |
| ونضع شروطا لنحصل على معادلتين في $c_1'(x), c_2'(x)$ . |
| (4) نجد قيم $c_1 , c_2$ التي تحقق المعادلتين . وبذلك نجد $y_p$ . |

والآن إلى تفاصيل العملية كي نخرج لك قانونا جاهزا جميلا لإيجاد $y_p$ . فإلى ذلك ندعوك .

ضع $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ ثم عوض في المعادلة الرئيسية :

$y'' + a y' + by = f$ ، لنحصل على :

$$c_1(y_1'' + a y_1' + by_1) + c_2(y_2'' + a y_2' + by_2) + (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + a(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = f \cdots\cdots(2)$$

وحيث أن $y_1 \ , \ y_2$ هما حلان للمعادلة(1) ، فإن المعادلة(2) تصبح :

$$(c_1' y_1 + c_2' y_2)' + a(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = f \cdots\cdots(3)$$

والمعادلة(3) تتحقق فيما لو اخترنا :

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

هاتان معادلتان بمجهولين : $c_1' , c_2'$ . نحلها لنحصل على :

$$c_2' = \frac{y_1(x) f}{W[y_1, y_2](x)} \quad , \quad c_1' = -\frac{y_2(x) f}{W[y_1, y_2](x)}$$

ومنه

$$c_2 = \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)\, y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt \quad , \quad c_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{f(t)\, y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

وعليه

$$y_p = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$$

ومنه

$$\boxed{y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, f(t)\, dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

حيث

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (5)$$

والاقتران $K(x,t)$ يسمى " **اقتران جرين** " .

هل تلاحظ أن الحل الذي أوجدناه يحقق الشروط $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ ؟ تحقق من ذلك بنفسك .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : جد الحل العام للمعادلة $y'' + y' = \tan x$ .

**الحـــل** : نجد أولاً $y_h$ :

$r^2 + 1 = 0$ لها حلان $r_1 = i$ , $r_2 = -i$ ، وعليه فإن $y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ .

ولإيجاد $y_p$ نستخدم القانون(4) :

$$y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t) \tan t \, dt$$

إذن نجد $K(x,t)$ حسب القانون(5) . وعليه

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}} = \sin(x - t)$$

وعليه

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \sin(x - t) \tan t \, dt$$

وباختيار $x_0 = 0$ نحصل على :

$$y_p = \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

وبذلك يكون

$$y_g = y_h + y_p$$
$$= c_1 \sin x + c_2 \cos x + \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

**مثال(2)** : جد الحل العام للمعادلة $y'' - 3y' + 2y = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ .

**الحل** : نجد أولا $y_h$ :

$r^2 - 3r + 2 = 0$ لها حلان $r_2 = 1$ , $r_1 = 2$ ، وعليه فإن $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ .

إذن :

$$y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t) \frac{-e^{2x}}{1+e^{2x}} dt$$

حيث

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^x & e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix}}$$

إذن
$$K(x,t) = \left(e^{t+2x} - e^{x+2t}\right) \cdot e^{-3t}$$

ومنه نحصل على

$$y_g = e^x \ln\left(e^x + 1\right) + e^{2x} \ln\left(e^{-x} + 1\right)$$

وبالتالي :

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln\left(e^x + 1\right) + e^{2x} \ln\left(e^{-x} + 1\right)$$

أيكفيك هذه الأمثلة ؟ إذن لا مزيد .

وتكون هذه نهاية الوحدة الرابعة ، لننتقل بعدها إلى وحدة جديدة .

## مســـائـــل

**الوحدة الرابعة**

**بند (6)**

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y'' + y = \sec x$

(2) $y'' - y' - 2y = e^{-x} \sin x$

(3) $y'' + 4y' + 4y = x e^{2x}$

(4) $4y'' - 8y' + 5y = e^{x} \tan^2 \frac{x}{2}$

(5) $4y'' + 4y' + y = x e^{\frac{x}{2}} \sin x$

(6) $y'' + 4y = \frac{e^{2x}}{2}$

(7) $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$

(8) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$

(9) $y'' + 4y = \operatorname{cosec}^2 2x$

(10) $y'' + 9y = \sec^2 3x$

(11) $y'' + y = \tan^2 x$

(12) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

(13) $y'' + 4y = \tan 2x$

(14) $y'' + y = \tan x + e^{3x} - 1$

# الوحدة الخامسة

## المعادلات الخطية من المراتب العليا

**" Higher Order Linear Equation "**

لا يوجد أفكار جديدة في هذه الوحدة ولكن حسابات جديدة من حيث طولها لا من حيث فكرتها . فلا زلنا نريد أن نجد الحل العام للمعادلة :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots\cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

فالأفكار هي نفس أفكار الوحدة الرابعة . وحتى لا يطول بك الشوق دعنا نمخر عباب بحر هذه الوحدة .

## 1- ملاحظات عامة ( General Remarks )

القضية كلها هو أننا نريد الحل العام أو حلا يحقق شروطا أولية للمعادلة :

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots\cdots+a_1y'+a_0y=f \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وعادة السؤال الأول في هذا الخصوص هل هناك مثل هذا الحل ؟ والجواب :

**نظرية 1.1 :** لنفرض أن $a_{n-1},\cdots\cdots\cdots,a_0,f$ هي اقترانات متصلة على الفترة $(a,b)$ والتي تحوي النقطة $x_0$ ، فإن المعادلة(1) لها حل وحيد يحقق الشروط :

$$y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_1\,,\cdots\cdots\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

حيث $y_0\ ,\ y_1,\cdots\cdots\cdots,\ y_{n-1}$ هي أعداد حقيقية .

إذن إذا كانت العوامل $a_{n-1},\cdots\cdots\cdots,a_0$ ثوابتا ، وكان f متصلا في مجال ما فهناك حل للمعادلة(1) يحقق شروطا أولية ما .

أما بالنسبة للحل العام للمعادلة(1) ، فإن الفكرة لا تخرج عن فكرة الوحدة الرابعة :

الحل العام للمعادلة ذات العوامل الثابتة :

$$L(y)=y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots\cdots+a_1y'+a_0y=f$$

هو

$$y_g=y_h+y_p$$

حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة $L(y)=0$ ، و $y_p$ هو حل خاص للمعادلة $L(y)=f$ .

أما كيف نجد $y_h\ ,\ y_p$ فهنا أيضا لا جديد في الموضوع : نفس خطوات إيجاد $y_h\ ,\ y_p$ والتي سبق شرحها في الوحدة الرابعة للمعادلة $y''+ay'+by=f$ .

والفرق هنا عددالجذور ومرات التكرار .

إذن لنترك هذا البند ونذهب لبنود التفصيل لهذه القواعد .

# مســـائــل

## الوحدة الخامسة

### بند(1)

1- ما هي أكبر فترة يمكن تطبيق نظرية 1.1 عليها :

$$(1)\ xy''' - 3y' + e^{x}y = x^{2} - 1 \quad , y(-2)=1, y'(-2)=0, y''(-2)=2$$

$$(2)\ y''' - \sqrt{x}\,y = \sin x \quad , y(\pi)=0, y'(\pi)=11, y''(\pi)=3$$

$$(3)\ y''' - y'' + \sqrt{x-1}\,y = \tan x \quad , y(5)=y'(5)=y''(5)=1$$

$$(4)\ x(x+1)y''' - 3xy' + y = 0 \quad , y\left(-\tfrac{1}{2}\right)=1,\ y'\left(-\tfrac{1}{2}\right)=y''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=0$$

$$(5)\ x\sqrt{x+1}\,y''' - y' + xy = 0 \quad , y\left(\tfrac{1}{2}\right)=y'\left(\tfrac{1}{2}\right)=-1,\ y''\left(\tfrac{1}{2}\right)=1$$

$$(6)\ \left(x^{2}-1\right)y''' + e^{x}y = \ln x \quad , y\left(\tfrac{3}{4}\right)=1, y'\left(\tfrac{3}{4}\right)=y''\left(\tfrac{3}{4}\right)=0$$

2- برهن أن الاقترانات التالية تشكل الحلول الأساسية للمعادلات المقابلة :

$$(1)\ y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0 \qquad ,\left\{e^{3x}, e^{-x}, e^{-4x}\right\}$$

$$(2)\ y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \qquad ,\left\{e^{x}, \cos 2x, \sin 2x\right\}$$

$$(3)\ x^{3}y''' - 3x^{2}y'' + 6xy' - 6y = 0 \qquad ,\left\{x, x^{2}, x^{3}\right\}$$

$$(4)\ y^{(4)} - y = 0 \qquad ,\left\{e^{x}, e^{-x}, \cos x, \sin x\right\}$$

## 2- إيجـــاد $y_h$ ( Homogenous Solution )

نعد الآن للمعادلة

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \cdots\cdots (1)$$

حيث

$$L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 D + a_0 I$$

**لنجد $y_h$ نقوم بايجاد حلول :**

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 r + a_0 = 0 \cdots\cdots (2)$$

ولنفرض أن هذه الحلول هي $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ .

ولأن عددها يفوق الإثنين فإن هذه الحلول يمكن أن تكون خليطا من الحلول الحقيقية والمركبة. بالإضافة إلى احتمال التكرار . وإليك التفاصيل في ايجاد $y_h$ .

1- كل حل لمعادلة(2) يعطي حلا أساسيا لمعادلة(1) إن كان حقيقيا وحلين أساسيين إن كان مركبا .

2- كل حل حقيقي للمعادلة(2) مكرر $k$ من المرات يعطينا $k$ من الحلول الأساسية للمعادلة(1) .

3- إذا كان $r = r_1$ حلا حقيقيا مكررا $k$ من المرات فإن الحلول الأساسية المتعلقة به هي :

$$y_1 = e^{r_1 x} , y_2 = x e^{r_1 x} , \cdots\cdots, y_k = x^{k-1} e^{r_1 x}$$

وكذلك الأمر بالنسبة لأي حل حقيقي مكرر .

4- الحل المركب للمعادلة(2) يعطي حلين أساسين للمعادلة(1) ومرافقه يعطي نفس الحلين .

5- إذا كان $r = a + ib$ حلا مركبا مكرراً $k$ من المرات فإن الحلول الأساسية المتعلقة به هي:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx , y_2 = x e^{ax} \cos bx, \cdots\cdots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx$$

$$y_{k+1} = e^{ax} \sin bx , \cdots\cdots , y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

والآن إلى أمثلة توضح ذلك كله .

**مثال(1) :** جد $y_h$ للمعادلة $(D+1)^2 (D^2+1)^2 (D-1) y = 0$ .

**الحـــل :** نجد أولا حلول

$$(r+1)^2 (r^2+1)^2 (r-1) = 0$$

والتي هي :

$$r_1=-1\ ,\ r_2=-1\ ,\ r_3=i\ ,\ r_4=i\ ,\ r_5=-i\ ,\ r_6=-i\ ,\ r_7=1$$

إذن

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3\cos x+c_4x\cos x+c_5\sin x+c_6x\sin x+c_7e^{x}$$

**مثال(2) :** جد $y_h$ للمعادلة $\left[D^3(D+1)\right]^4(D^2+1)^2(D^4-1)y=0$ .

**الحــــل :** لاحظ أن هذه المعادلة من الرتبة 24 .

المعادلة $\left[r^3(r+1)\right]^4(r^2+1)^2(r^4-1)=0$

تبسط إلى الشكل

$$r^{12}(r+1)^4(r^2+1)^2(r^2+1)(r-1)(r+1)=0$$

وعليه

$$r^{12}(r+1)^5(r^2+1)^3(r-1)=0$$

فالحلول إذن هي :

صفر مكرر 12 مرة

1- مكرر 5 مرات

i مكرر 3 مرات

i - مكرر 3 مرات

1 غير مكرر .

وعليه يكون

$$y_h=\sum_{i=0}^{11}c_ix^i+\sum_{i=0}^{4}a_ix^ie^{-x}+\sum_{i=0}^{2}b_ix^i\cos x$$
$$+\sum_{i=0}^{2}d_ix^i\sin x+\alpha e^{x}$$

وكما لاحظت فإنه لا جديد في فكرة إيجاد $y_h$ على ما سلف في الوحدة الرابعة .

والآن إلى بند آخر .

# مسـائـل

**الوحدة الخامسة**

**بند(2)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية ( الحل العام ) :

(1) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$

(2) $y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$

(3) $4y''' + 12y'' + 9y' = 0$

(4) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$

(5) $2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$

(6) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$

(7) $y^{(iv)} - y'' = 0$

(8) $y^{(iv)} - 8y'' + 16y = 0$

(9) $y^{(iv)} + 18y'' + 81y = 0$

(10) $4y^{(iv)} - 8y''' - y'' + 2y' = 0$

(11) $y^{(iv)} + y''' + y'' = 0$

(12) $y^{(iv)} = 0$

(13) $y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

(14) $y^{(v)} + 2y''' + y' = 0$

(15) $y^{(iv)} + y = 0$

2- جد المعادلة التفاضلية الخطية التي حلها العام :

(1) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 x e^{x}$

(2) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

(3) $y = (c_1 + c_2 x) \sin x + (c_3 + c_4 x) \cos x$

(4) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + c_3 x e^{4x} + c_4 x^2 e^{4x}$

## 3- طريق العوامل غير المعينة ( Undetermind Coeficients )

نكرر كلامنا هنا ونقول لا جديد في هذا الموضوع سوى كثرة الحلول الأساسية والتي يجب مقارنتها مع شكل $y_p$ بحيث نمنع التشابة بين حدود $y_p$ وبين أي من الحلول الأساسية لـ : $L(y) = 0$ .

وشكل $y_p$ يعتمد في الأساس على f في المعادلة $L(y) = f$ . وقاعدة شكله هي نفس قاعدة الحالة العامة من البند السادس في الوحدة الرابعة .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : جد شكل $y_p$ للمعادلة $(D^2 - 2D + 1)(D^2 - 4)^2 y = x\sinh x + \cosh 2x$ .

**الحـــل** : أولا نجد مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ . ونحل

$$(r^2 - 2r + 1)(r^2 - 4)^2 = 0$$

نجد أن مجموعة الحلول الأساسية هي :

$$\{e^x, xe^{-x}, e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$$

أما f فهو :

$$f(x) = x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \left(\frac{x+1}{2}\right)e^x + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-x}$$

وعليه $f = f_1 + f_2$ حيث $f_1 = \left(\frac{x+1}{2}\right)e^x$ , $f_2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-x}$

ومنه $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ ، حيث

$$y_{p_1} = x^s(a_1x + b_1)e^x$$

$$y_{p_2} = x^k(a_2x + b_2)e^{-x}$$

حيث s ، k هما ضوابط عدم التشابه بين $y_{p_1}$ , $y_{p_2}$ وبين الحلول الأساسية لـ $L(y) = 0$ .

ونلاحظ هنا أن $e^x$ , $xe^x$ هما حلول أساسية ، وبالتالي فإن $y_{p_1} = x^2(a_1x + b_1)e^x$ .

أما $y_{p_2}$ فلا تشابه بين حدوده والحلول الأساسية ومنه $k = 0$ .

إذن

$$y_p = x^2\left(a_1x + b_1\right)e^x + \left(a_2x + b_2\right)e^{-x}$$

**مثال(2)** : جد شكل $y_p$ للمعادلة :

$$\left(D^4 + 2D^3 - 3D^2\right)y = x + 2e^{3x} + e^x$$

**الحـــل :** أولا نجد الحلول الأساسية لـ :

$$r^4 + 2r^3 - 3r^2 = 0$$

$$r^2\left(r^2 + 2r - 3\right) = 0$$

$$r^2\left(r + 3\right)\left(r - 1\right) = 0$$

وعليه فالحلول هي : 1 ، 3- ، 0 ، 0 . إذن الحلول الأساسية هي :

$$y_1 = 1 , y_2 = x , y_3 = c^{-3x} , y_4 = e^x$$

والآن

$$f(x) = x + 2e^{-3x} + e^x$$

$$= f_1 + f_2 + f_3$$

إذن

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

حيث

$$y_{p_1} = x^s\left(a_1x + b_1\right)$$

$$y_{p_2} = x^k a_2 e^{-3x}$$

$$y_{p_3} = x^m a_3 e^x$$

وكالعادة s ، k ، m هي ضوابط عدم التشابه .

وبالنظر إلى الحلول الأساسية والاقترانات $f_3$ , $f_2$ , $f_1$ نجد أن شكل الحلول الخاصة هي :

$$y_{p_1} = a_1 x + b_1$$

$$y_{p_2} = a_2 x c^{-3x}$$

$$y_{p_3} = a_3 x e^x$$

ويكون

$$y_p = \left(a_1 x + b_1\right) + a_2 x e^{-3x} + a_3 x e^x$$

يكفيك هذا القدر من الأمثلة . وإلى بند آخر .

## مســائــل

**الوحدة الخامسة**

**بند(3)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية ( الحل العام ) :

(1) $D(D+1)y = 2x + 3e^{x}$     (2) $D(D+1)y = 2 + e^{-x}$

(3) $D(D-1)y = \sin x$     (4) $(D^2+1)y = 3\cos x$

(5) $(D^2 + 4D + 2)y = xe^{2x}$     (6) $(D^2 + D - 6)y = 6(x+1)$

(7) $D(D^2 - 2D + 10)y = 3xe^{x}$     (8) $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = x^4 + 4x^3$

(8) $(D^3 - D^2 - D + 1)y = 2(x + 2e^{-x})$     (10) $(D^4 + 5D^2 + 4)y = 2\cos x$

2- جد شكل الحل الخاص لكل من :

(1) $(D^2+1)^3(D-1)y = 3e^{x} + 5x^2\cos x$

(2) $D^2(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = (x^2+1)(1-e^{x})$

(3) $(D^8 - 2D^4 + 1)y = (2x-1)\cosh x + x^3 \sin x$

(4) $(D^3 - 1)(D^2 + D - 2)y = e^{\frac{x}{2}}\sin\sqrt{3}x - x\cos\sqrt{3}x$

## 2- طريقة تغير الوسطاء ( Variation Of Parameters )

وهنا أيضا لا جديد . ففي الوحدة الرابعة أوجدنا لك قانون إيجاد $y_p$ والذي كان بالشكل:

$$y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t) f(t)\, dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

حيث $K(x,t)$ هو اقتران جرين . وطريقة برهان وإيجاد قانون(1) في حالة المرتبة الثابتة للمعادلة $L(y) = f$ لا تختلف مطلقا عنها في حالة الرتب العالية سوى في الحسابات . ولذلك نكتفي هنا بأن نعطيك القانون(1) في الحالة العامة :

> نظرية 4.1 : إذا كان $y_1, \cdots\cdots, y_n$ هي الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = f$ فإن
>
> $$y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t) f(t)\, dt$$
>
> حيث
>
> $$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1(x) & \cdots & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, \cdots\cdots, y_n](t)}$$

وبرهان هذه النظرية لا يختلف أبدا عن برهان قانون(1) في الوحدة الرابعة . ولذلك سنكتفي بنص النظرية دون برهانها .

أتريد أمثلة الآن . سوف نضع أمامك أحدها .

**مثال(1)** : جد $y_p$ للمعادلة $3y''' + 5y'' - 2y' = e^x$ .

**الحـــل** : نجد أولا الحلول الأساسية

$$3r^3 + 5r^2 - 2r = 0$$

ومنه

$$r(3r^2 + 5r - 2) = 0$$

أي أن

$$r(3r - 1)(r + 2) = 0$$

وعليه فإن : $r_1=0\ ,\ r_2=\frac{1}{3}\ ,\ r_3=-2$

إذن $y_1=1\ ,\ y_2=e^{\frac{x}{3}}\ ,\ y_3=e^{-2x}$

والآن نجد $W[y_1,y_2,y_3](t)$ .

وإن قمت بالحسابات ستجد أن رونسكي الحلول هو :

$$W[y_1,y_2,y_3](t)=-\frac{2}{9}e^{\frac{-5t}{3}}-\frac{4}{3}e^{-\frac{5t}{3}}$$

ونستطيع بعد ذلك أن نحسب $K(x,t)$ لنجده :

$$K(x,t)=\frac{\begin{vmatrix}1 & e^{-2t} & e^{\frac{t}{3}}\\ 0 & -2e^{2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}\\ 0 & e^{-2x} & e^{\frac{x}{3}}\end{vmatrix}}{W[y_1,\cdots\cdots,y_n](t)}=\frac{\frac{7}{3}e^{-\frac{5t}{3}}-\frac{1}{3}e^{-2x}e^{\frac{t}{3}}-2e^{\frac{x}{3}}e^{-2t}}{-\frac{2}{9}e^{-\frac{5t}{3}}-\frac{4}{3}e^{\frac{5t}{3}}}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{14}e^{-2(x-t)}+\frac{9}{7}e^{\frac{(x-t)}{3}}$$

وعليه يكون

$$y_p=\int_{x_0}^{x}K(x,t)\,e^t\,dt$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[-\frac{3}{2}e^t+\frac{3}{14}e^{-2x}\cdot e^{3t}+\frac{9}{7}e^{x}\cdot e^{\frac{2}{3}t}\right]dt$$

نستطيع هنا اختيار $x_0=0$ . هل تريد أن تجري التكامل الأخير ، لعلنا نرى الشوق في عينيك . إذن سنتركه لك .

لنذهب إلى بند آخر .

## مسائل

### الوحدة الخامسة

**بند(4)**

1- جد الحل العام للمعادلات التالية باستخدام طريقة تغير الوسطاء .

(1) $\left(D^3 - D^2 - D + 1\right)y = 4xe^x$

(2) $y''' - y' = \sin x$

(3) $y''' - 2y' = 4(x+1)$

(4) $\left(D^3 - 3D^2 - D + 3\right)y = 1 + e^x$

(5) $y''' - 7y' + 6y = 2\sin x$

(6) $y''' - 3y' - 2y = 9e^{-x}$

(7) $y''' - y' = \cos x$

(8) $y''' + y'' + y' + y = 2(\sin x + \cos x)$

(9) $y^{(iv)} - y'' = 2xc^x$

(10) $y^{(iv)} - y = x^2 + 1$

## 5- معادلة أويلر ( Euler Equation )

في هذا البند نعالج المعادلة من الشكل

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \cdots\cdots (1)$$

حيث $a_0 , a_1 , \cdots\cdots , a_{n-1}$ هي ثوابت .

لعلك مندهش ! كيف نبحث معادلة ذات معاملات متغيرة ونحن بصدد المعادلات ذات المعاملات الثابتة . لا تحزن ! فهذه معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات ذات عوامل ثابتة . أما طريق ذلك فإليك البيان :

**طريقة حل معادلة أويلر :**

1- نضع التعويض $x = e^t$ أو $t = \ln x$ .

2- نعوض في المعادلة ونغير التفاضل من $\frac{dy}{dx}$ إلى $\frac{dy}{dt}$ .

وباستخدام قانون السلسلة في التفاضل نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\vdots$$

وإذا أردنا تبسيط شكل الكتابة نضع $D = \frac{d}{dt}$ فنجد أن :

$$y' = \frac{1}{x} D y \quad , \quad y'' = \frac{1}{x^2} D(D-1) y$$

$$y''' = \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2) y ,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{x^n} D(D-1) \cdots\cdots (D-n+1) y$$

3- نحصل بهذا على معادلة ذات عوامل ثابتة :

$$\left[D(D-1)\cdots\cdots(D-n+1) + \cdots\cdots + a_1 D + a_0\right] y = 0 \cdots\cdots (*)$$

4- نحل المعادلة (*) بطريقة البند الثاني من هذه الوحدة .

وهنا يكون الحل : $y$ بدلالة المتغير $t$ .

5- نعوض $t = \ln x$ لنحصل على الحل المطلوب للمعادلة(1) .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : حل المعادلة $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

**الحـــل** : هذه معادلة أويلر . إذن نضع $x = e^t$ أو $t = \ln x$ .

ذلك يعطينا

$$y'' = \frac{1}{x^2}[D(D-1)y]$$

$$y' = \frac{1}{x}Dy$$

حيث $D = \frac{d}{dt}$ . إذن تصبح المعادلة

$$[D(D-1) + 2D - 2]y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

نحل هذه المعادلة لنجد

$$r(r-1) + 2r - 2 = 0$$

ومنه

$$(r+2)(r-1) = 0$$

أي $r_1 = 1 \;,\; r_2 = -2$ .

ويكون $y_h$ للمعادلة (*) هو :

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

نضع الآن $t = \ln x$ ( أو $e^t = x$ ) لنحصل على :

$$y_h = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2 x$$

**مثال(2)** : حل المعادلة $(x-1)^2 y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$ .

**الحـــل** : لا تبدو هذه المعادلة على أنها معادلة أويلر ، لا عليك إنها كذلك . لكن هناك تعويض قبل أن تصبح المعادلة بشكل معادلة أويلر .

ذلك التعويض هو $x - 1 = u$ . ومنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}$$

وكذلك $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}$ .

إذن تصبح المعادلة :

$$u^2\frac{d^2y}{du^2} + 2u\frac{dy}{du} - 2y = 0$$

هذه معادلة أويلر . نحلها بالتعويض $u = e^t$ ( أو $t = \ln u$ ) لنحصل على :

$$[D(D-1)+2D-2]y = 0$$

وكما سبق في المثال السابق حل هذه هو :

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

نضع $t = \ln u$ لنحصل على :

$$y = \frac{c_1}{u^2} + c_2 u$$

نعوض الآن $u = x - 1$ ، لنحصل على

$$y = \frac{c_1}{(x-1)^2} + c_2 (x-1)$$

وإلى مثال أخير ولكن كن يقظاً لهذا المثال .

**مثال(3) :** حل المعادلة $(2x-1)^2 y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$ .

**الحـــل :** كما في المثال السابق : نضع $u = 2x - 1$ .

ومنه نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2\frac{dy}{du}$$

وكذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= 4\frac{d^2y}{du^2}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$4u^2 \frac{d^2y}{du^2} + 2u\frac{dy}{du} - 2y = 0$$

هذه معادلة أويلر .

إذن نضع $u = e^t$ أو ( $t = \ln u$ ) لنحصل على

$$[4D(D-1)+2D-2]y = 0$$

( حيث $D = \frac{d}{dt}$ ) .

والمعادلة $4r(r-1) + 2r - 2 = 0$

تعطينا $r = 2$ , $r = -\frac{1}{2}$ .

ومنه $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^t$

نعوض $t = \ln u$ ، لنحصل على :

$$y = c_1 \frac{1}{\sqrt{u}} + c_2 u$$

وأخيرا نعوض $u = 2x - 1$ ، لنحصل على :

$$y = c_1 \frac{1}{2x-1} + c_2 (2x-1)$$

وبهذا نأتي على ختام هذا البند ، لنرحل بسفينتنا إلى بند آخر . فإلى هناك .

---

# مســـائــل

**الوحدة الخامسة**

**بند(5)**

1- حل المعادلات التفاضلية التالية ( الحل العام ) :

(1) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

(2) $x^2 y'' + xy' = 0$

(3) $x^2 y'' + 9xy' + 2y = 0$

(4) $x^2 y'' + xy' + 9y = 0$

(5) $x^2 y'' - 5xy' + 25y = 0$

(6) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

(7) $2x^2 y'' - xy' + y = 0$

(8) $x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0$

(9) $(x-1)^2 y'' + 3(x-1) y' + y = 0$

(10) $(x+4)^3 y''' - 2(x+4)y' + 2y = 0$

(11) $(x-3)^3 y''' + 2(x-3)^2 y'' - (x-3)y' + y = 0$

(12) $(2x+1)^2 y'' + 4(2x+1)y' + y = 0$

## 6- المفني وعلاقته بالحل الخاص ( Annihilator )

لقد مر بنا مفهوم المفني في الوحدة الثالثة . وهنا نذكرك به ونستخدمه في إيجاد شكل الحل الخاص للمعادلة $L(y) = f$ في طريقة العوامل غير المعينة دون الحاجة للنظر إلى الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ . ولنبدأ بإعطاء المفني تعريفاً دقيقاً .

> **تعريف 6.1** : نقول أن المؤثر L يفني الاقتران y إذا كان $L(y)(x) = 0$ لكل x في **R**.
> ومن التعريف نستنتج أن الاقتران y معرف على كل **R** . وإذا كان L هو حدودية في مؤثر التفاضل فإن $y^{(n)}$ موجود لكل x في **R** ، حيث n يعتمد على درجة الحدودية .

ولنأت الآن ببعض الأمثلة .

**مثال(1)** : جد مفنيا للإقتران $y = e^{2x}$ .

**الحل** : لنفرض $L = D - 2$ . إذا حسبنا $L(y)$ نجد

$$L(y) = (e^{2x})' - 2e^{2x} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

وعليه يكون $D - 2$ مفنيا للإقتران $y = e^{2x}$ .

**مثال(2)** : جد مفنيا للإقتران $y = e^{2x} \sin 3x$ .

**الحل** : إذا كان $L = (D-2)^2 + 9 = D^2 - 4D + 13$ .

نجد أن :

$$L(e^{2x} \sin 3x) = 0$$

وهنا لا بد من الملاحظة أن حلول المعادلة

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

هي

$$y_2 = e^{2x} \cos 3x \quad , \quad y_1 = e^{2x} \sin 3x$$

وعليه فإن $L = (D-2)^2 + 9$ هو مفني للإقتران $y = e^{2x} \sin 3x$ .

**مثال(3)** : جد مفنيا للإقتران $y = x^2 e^x - x \sin 4x + 3$ .

**الحـــل :** نلاحظ هنا أن $y = y_1 + y_2 + y_3$ . لذلك نجد $L_1$ مفنيا لـ $y_1$ ، $L_2$ مفنيا لـ $y_2$ ، $L_3$ مفنيا لـ $y_3$ . ويكون $L = L_1 L_2 L_3$ هو مفنيا للاقتران $y$ . ولا بد من ملاحظة أن $L_1 \; , \; L_2 \; , \; L_3$ هي حدوديات في مؤثر التفاضل $D$ ،
وبالتالي

$$L_2 L_1 L_3 = L_1 L_2 L_3 = L_2 L_3 L_1$$

أي أنها تبادلية في ما بينها .

والآن بسهولة نرى أن $L_3 = D$ . أما $y_2$ فإنه حل أساسي للمعادلة $(D^2+16)^2 y = 0$ وعليه $L_2 = (D^2+16)^2$ . وكذلك $x^2 e^x$ هو حل للمعادلة $(D-1)^3 y = 0$ وعليه يكون $L_1 = (D-1)^3$ .

إذن $$L = (D-1)^3 (D^2+16)^2 D$$

هل تريد أمثلة أخرى .
ربما نضع الأمثلة بصورة أخرى .

**مثال(4) :** جد المعادلة التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة التي حلها العام

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 \sin x + c_5 \cos x$$

**الحـــل :** نجد مفني كل حد من حدود الحل العام ثم نركب المفنيات لنحصل على المؤثر الأساسي الذي يكون المعادلة . ولكن لا بد من ملاحظة أن نأخذ المفنى المشترك في حال التكرار أو الاشتراك في المفنيات .

وعليه فإن $D^2$ هو مفني $y = x$ وهو أيضا مفني $y = 1$ . ومفني $e^{-x}$ هو $(D+1)$ ومفني $y = \sin x$ هو مفني $\cos x$ وهو المؤثر $(D^2+1)$ ، وعليه فإن المؤثر الأساسي للمعادلة هو $L = D(D+1)(D^2+1)$ ، وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$L(y) = y^{(4)} + y''' + y'' + y' = 0$$

**مثال(5) :** جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x^3$$

**الحـــل** : نلاحظ هنا أن $y_g = y_h + y_p$ ، حيث

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ و $y_p = x^3$ .

إذن معادلتنا المطلوبة ليست متجانسة فهي من الشكل $L(y) = f$ .

وعليه أمامنا قضيتان : إيجاد $L$ وإيجاد $f$ .

أما $L$ فنجده باستخدام $y_h$ كما سلف في الأمثلة السالفة . وحيث $y_1 = e^x$ , $y_2 = e^{-x}$ ، فإن المفني المشترك لهما هو :

$$L = (D+1)(D-1) = D^2 - 1$$

أما $f$ فنجده باستخدام : $L(y_p) = f$

إذن

$$f = (D^2 - 1)(x^3)$$
$$= 6x - x^3$$

وبالتالي فإن معادلتنا المطلوبة هي :

$$L(y) = f$$
$$(D^2 - 1)y = 6x - x^3$$

إنه حق لمثال جميل .

ولكن دعنا نرى الآن علاقة المفني بطريقة إيجاد الحل الخاص في حال : **طريقة العوامل غير المعينة** .

عندما كنا نريد إيجاد شكل $y_p$ بطريقة العوامل غير المعينة ، كان علينا إيجاد $y_h$ ثم التاكد من عدم وجود حدود مشتركة بين $y_p$ و $y_h$ .

ولكن إذا استخدمنا فكرة المفني فإننا نستطيع إيجاد شكل $y_p$ دون الحاجة للمقارنة بينه وبين $y_h$ .

وإليك بيان ذلك :

نأخذ المعادلة $L(y) = f$ حيث $f$ اقتران مولد من $e^{ax}$ , $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$ , $\sin bx$ , $\cos dx$
عن طريق الجمع أو الضرب أو كليهما معا .

إذا كان $T$ هو مفن للاقتران $f$ ، فإن :

$$T L(y) = T f = 0$$

وعليه نحصل على معادلة متجانسة $T L(y) = 0$ .

والمؤثر $L$ هو حدودية $P(D) = a_0 + a_1 D + \cdots\cdots\cdots + a_n D^n$ ، وكذلك
المؤثر $T$ هو حدودية $Q(D) = b_0 + b_1 D + \cdots\cdots\cdots + b_k D^k$ . وكون $T$ هو من
هذا الشكل ناجم عن واقع $f$ المبين أعلاه .

وعليه : الحل العام للمعادلة $L(y) = f$ هو نفسه حل للمعادلة $T L(y) = 0$ . وشكل الحل
العام للمعادلة هو :

$$y_g = c_1 y_1 + \cdots\cdots\cdots + c_{k+n} y_{k+n}$$

حيث حصلنا على $y_1, y_2, \cdots\cdots\cdots, y_{k+n}$ عن طريق جذور الحدودية $Q(r) P(r)$ .
والحل العام $y_h$ للمعادلة $L(y) = 0$ هوجزء من حل المعادلة $T L(y) = 0$ . وعليه فإن
شكل $y_p$ هو : $\boxed{y_g - y_h}$ حيث $y_g$ هو الحل العام ل $T L(y) = 0$ .

والآن إليى بعض الأمثلة .

**مثال(6)** : جد شكل $y_p$ للمعادلة

$$L(y) = (D^2 + 1)(D - 1)^2 y = 3e^x + 4\cos x$$

**الحـــل** : نجد أولا مفني $f$ وهو في حالتنا $T = (D-1)(D^2+1)$ .
إذن معادلتنا الجديدة هي :

$$T L(y) = (D-1)(D^2+1)(D^2+1)(D-1)^2 y = 0$$

ومنه نحصل على :

$$(D^2+1)^2 (D-1)^3 y = 0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

وحيث أن جذور $(r^2+1)^2(r-1)^3$ هي :

$i\ ,\ i\ ,-i\ ,\ -i\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1$ ، فإن الحل العام للمعادلة (*) هو :

$$y_g = c_1\sin x + c_2\cos x + c_3 x\sin x + c_4 x\cos x + c_5 e^x + c_6 xe^x + c_7 x^2e^x$$

أما $y_h$ للمعادلة $L(y)=0$ فهو :

$$y_h = a_1\sin x + a_2\cos x + a_3 e^x + a_4 xe^x$$

وحيث أننا يمكن أن نعيد تسمية الثوابت كما تشاء ، فإن :

$$y_p = y_g - y_h = b_1 x^2e^x + b_2 x\cos x + b_3 x\sin x$$

هل تريد مثالاً آخر . أمر سهل :

**مثال(7)** : جد شكل الحل الخاص للمعادلة

$$\left[D(D+1)\right]^2\left[(D+1)^2+1\right]y = x^2 + x\cos x\, e^{-x}$$

**الحــــل** : نجد أولا مفني $f$ . وهو في حالتنا :

$$T = D^3\left[(D-1)^2+1\right]^2$$

إذن معادلتنا الجديدة هي :

$$D^3\left[(D+1)^2+1\right]^2\left[D^2(D+1)^2\right]\left[(D+1)^2+1\right]y = 0$$

أي :

$$D^5(D+1)^2\left[(D+1)^2+1\right]^3 y = 0$$

ومنه

$$y_g = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6e^{-x} + c_7xe^{-x}$$
$$+ c_8e^{-x}\sin x + c_9e^{-x}\cos x + c_{10}xe^{-x}\sin x$$
$$+ c_{11}xe^{-x}\cos x + c_{12}x^2e^{-x}\sin x + c_{13}x^2e^{-x}\cos x$$

ولكن $y_h$ للمعادلة $L(y)=0$ هو :

$$y_h = a + a_2x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x} + a_5e^{-x}\sin x + a_6e^{-x}\cos x$$

وعليه يكون شكل $y_p$ هو :

$$
\begin{aligned}
y_p = {} & b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4 + b_4xe^{x}\sin x \\
& + b_5xe^{-x}\cos x + b_6x^2e^{-x}\sin x + b_7x^2e^{-x}\cos x
\end{aligned}
$$

يكفينا هذا القدر من الأمثلة في هذه الوحدة .

---

# مســـائــل

## الوحدة الخامسة

**بند(6)**

1- جد مفني الاقترانات التالية .

(1) $y = x^4 - x^2 + 11$

(2) $y = 3x^2 - 6x + 1$

(3) $y = e^{-7x}$

(4) $y = e^{5x} + \sin x$

(5) $y = e^{2x} - 6e^x$

(6) $y = x^2 - e^x + \cos x$

(7) $y = x^2 e^{-x} \sin 2x$

(8) $y = xe^{3x} \cos 5x + 1$

(9) $y = xe^{-2x} + xe^{-5x} \sin 3x$

(10) $y = 1 + x + x^2 + x \sin x$

2- استخدم طريقة المفني لإيجاد شكل الحل الخاص لكل من :

(1) $y'' - 5y' + 6y = \cos 2x + 1$

(2) $y'' + 6y' + 8y = c^{3x} - \sin x$

(3) $y'' - 5y' + 6y = c^{3x} - x^2$

(4) $y'' - y = xc^x$

(5) $y'' - 6y' + 9y = \sin 2x + x$

# الوحدة السادسة

## تحويل لابلاس

**" Laplace Transform "**

إن تحويل لابلاس من الأدوات المهمة والفاعلة في حل المعادلات التفاضلية وخاصة مسائل القيم الإبتدائية . والسّر في تحويل لابلاس أنه يحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة عادية ( ليست تفاضلية ) .ويستخدم تحويل لابلاس أيضا في حل المعادلات التكاملية . وسوف نقوم في هذه الوحدة بدراسة هذا التحويل دراسة شاملة إلى حد ما بما يلائم مستوى مادة هذا الكتاب.

## 1- التـــعـــريــف ( Definition Of Laplace Transform )

إن تحويل لابلاس ليس سوى اقتران ، ولكن بصفات محددة . والاقتران عـادة يقف علـى ثلاثة أقدام : قدم المجال وقدم المدى وقدم قاعدة الاقتران . وقاعدة الاقتران هي أقوى الأقدام .

وحيث أننا في النهاية نريد أن نحل معادلة تفاضليـة ، فلا بـد أن نحصـر مجـال تحويـل لابلاس في فضاء الاقترانات شبه المتصلة على الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ . تعلـم أنـك الآن تسـاءلت بصوت عال : " ماذا تعني بشبه متصلة " ؟ .
سوف نبدد عنك غيوم الشك بحرارة اليقين .

**تعريف 1.1 :** يسمى الاقتران $f$ اقترانا متصلا قِطعيا أو شبه متصل على $[a , b]$ حيث $f : [a , b] \to \mathbf{R}$ ، إذا تحققت الشروط التالية :

**(1)** $f$ متصل على $[a , b]$ ما عدا على عدد منتهي من النقاط $\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ .

**(2)** النهايات $\lim_{t \to 0^+} f(x+t)$ , $\lim_{t \to 0^+} f(x-t)$ موجودة لكل $x$ في $[a , b]$

( عند أطراف الفترة فقط نهاية واحدة لها معنى ) .

ونقـول أن $f$ متصـل قطعيـا علـى $[a \,,\, \infty)$ إذا كـان $f$ متصـلا قطعيـا علـى كـل فـترة $[a , b]$ حيث $b > a$ .

نستنتج من ذلك أن الاقتران المتصل قطعيا على $[a , b]$ هو اقتران متصل على $[a , b]$ ما عدا عند عدد منتهي من النقاط وعند هذه النقاط يكون سلوك الاقتران مسيطراً عليه .

**مثال(1) :** الاقتران $f : [0 , 4] \to \mathbf{R}$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x \le 1 \\ 3 & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

هو اقتران متصل قِطعيا حيث أن نقاط المشاكل لهذا الاقتران هي 1 ، 2 . ونلاحظ بيسر وجـود النهايات عند هذه النقاط .

**مثال(2) :** الاقتران $f : [0 , 4] \to \mathbf{R}$

حيث
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ليس متصلا قِطعيا حيث أن النهاية $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ غير موجودة .

ونحن على يقين أنك لاحظت ما يلي :

**ملاحظة(1)** : كل اقتران متصل على $[a , b]$ هو اقتران متصل قِطعيا .

والآن دعنا نضع لك تعريف تحويل لابلاس من حيث قاعدة التحويل وليس مجاله . ولكن لا بد أن نخبرك أن المجال الذي سوف نعرف عليه تحويل لابلاس سوف يكون جزءا من الاقترانات المتصلة قِطعيا على $[0 , \infty)$ .

والآن إلى التعريف الأساسي :

| **تعريف1.2** : لنفرض أن f اقتران حقيقي على الفترة $[0 , \infty)$ ومتصل قِطعيا . فإن $$\mathbf{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \cdots\cdots\cdots(1)$$ |
|---|

إذن تحويل لابلاس هو تحويل تكامل . يحول الاقتران f في المتغير t إلى اقتران جديد $\hat{f}(s) = \mathbf{L}(f)(s)$ في المتغير s ولا بد أن نذكر هنا :

**ملاحظة(2)** : إن مجال الاقتران الجديد $\hat{f}(s)$ يعتمد على الاقتران f . فإذا تغَير f فإن مجال $\hat{f}$ يتغير .

**ملاحظة(3)** : يجب أن نفهم التكامل (1) على أنه تكامل معتل وعليه فإن :
$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-st} f(t)\, dt$$

والآن إلى بعض الأمثلة :

**مثال(3)** : جد لابلاس $f(t) = t$ .

**الحـــل** : سوف نطبق التعريف :

$$L(t)(s)=\hat{f}(s)=\int_0^\infty t e^{-st}\,dt$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r t e^{-st}\,dt\right]$$

وباستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$L(t)(s)=\frac{1}{s}\ ,\qquad s>0$$

**مثال(4)** : جد لابلاس $f(t)=\cos 2t$ .

**الحـــل** : ليس هناك أفكار بل حسابات .

$$L(\cos 2t)(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r e^{-st}\cos 2t\,dt\right]$$

وإذا كاملنا بالتجزيء نحصل على :

$$L(\cos 2t)(s)=\frac{s}{s^2+4}+\lim_{r\to\infty}\left[\frac{e^{-sr}}{s^2+4}\left(2\sin 2r-s\cos 2r\right)\right]$$

ونلاحظ هنا أن النهاية في الحد الثاني موجودة فقط إذا كان $s>0$ . فإذا كانت $s=0$ فإن $\lim_{r\to\infty}\sin 2r$ غير موجودة .

وكذلك إذا كانت $s<0$ فإن $\lim_{r\to\infty} e^{-sr}=\infty$ وتكون النهاية غير موجودة . وعليه فإن $L(\cos 2t)(s)$ موجود فقط على الفترة $(0\ ,\infty)$ .

ومنه $$L(\cos 2t)(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

والآن :

| هل كل اقتران متصل قطعيا هو في مجال تحويل لابلاس ؟ |
|---|

الجواب لا . ولعلك قادر بنفسك أن تتحقق أن $f(t)=e^{t^2}$ متصل قِطعيا ولكن $L\left(e^{t^2}\right)$ غير موجود . ولنا فيك ثقة أن تقوم بالحسابات بنفسك .

وهذا الواقع يفرض علينا التعريف التالي :

**تعريف 1.3 :** لنفرض أن f اقتران معرف على $[0 , \infty)$ . نقول أن f هو اقتران ذو ترتيب أسّي إذا وجد هناك ثابتان $c , \alpha$ بحيث :

$$|f(t)| \le ce^{\alpha t}$$

لكل t في $(0 , \infty)$ .

ونستطيع أن نلخص خصائص الاقترانات ذات الترتيب الأسّي في النظرية التالية :

**نظرية 1.1 :** مجموعة الاقترانات ذات الترتيب الأسّي تشكل متجها فضائيا بالنسبة للعمليات العادية .

**البرهان :** لنرمز لمجموعة الاقترانات ذات الترتيب الأسّي على الفترة $[0 , \infty)$ بالرمز $E[0 , \infty)$. وسوف نكتفي ببرهان أن عملية الجمع مغلقة على $E[0, \infty)$ وأن عملية ضرب الثوابت أيضا مغلقة . أما بقية الخصائص فهي سهلة الاستنتاج ونتركها لك حتى لا تشعر بالفراغ أو الملل .

والآن لنفرض أن $f_1 , f_2 \in E[0 , \infty)$ . وعليه

$$|f_1(t)| \le c_1 e^{\alpha_1 t}$$

$$|f_2(t)| \le c_2 e^{\alpha_2 t}$$

وإذا أخذنا $\alpha = \max\{\alpha_1 , \alpha_2\} \ , \ c = \max\{c_1 , c_2\}$

فإن

$$|f_1(t)+f_2(t)| \le c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\le ce^{\alpha t}$$

وكذلك

$$|\lambda f_1(t)| \le |\lambda| c_1 e^{\alpha_1 t}$$

وهذا ينهي برهان ما أردنا برهانه .

ومن الأمثلة على الاقترانات ذات الترتيب الأسّي على $[0, \infty)$ :

**نظرية 1.2 :**

1- $P(t) \in E[0,\infty)$ لكل حدودية $P(t)$ .

2- $\sin at \in E[0,\infty)$ لكل $a \in \mathbf{R}$ .

3- $\cos at \in E[0,\infty)$ لكل $a \in \mathbf{R}$ .

4- $e^{at} \in E[0,\infty)$ لكل $a \in \mathbf{R}$ .

5- حاصل ضرب أي من الاقترانات 1، 2، 3، 4 هو في $E[0,\infty)$ .

**البرهان :** 1- باستخدام نظرية 1.1 يكفي أن نبرهن أن $P(t) = t^n$ هي في $E[0,\infty)$ لأي $n \in N$ .

ولكن من متسلسلة تيلر للاقتران الأسّي $e^t$ نجد أن

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n+1}}{n+1!} + \cdots\cdots$$

وحيث أن $t \in [0,\infty)$ فإن :

$$\frac{t^n}{n!} \le e^t$$

ومنه $t^n \le (n!)e^t$ .

وعليه $t^n \in E[0,\infty)$ .

2- $f(t) = \sin at$ ومنه :

$$|f(t)| \le 1 = e^{0t} \le e^{1t}$$

لكل $t \in [0,\infty)$ .

إذن $\sin at \in E[0,\infty)$ .

3- البرهان شبيه بأخيه في (2) .

4- هذه نتركها لك .

5- يكفي أن نبرهن الخاصية : إذا كان $f_1, f_2$ في $E[0,\infty)$ فإن $f_1, f_2 \in E[0,\infty)$ .

ولكن :

$$|f_1(t)| \le c_1 e^{\alpha_1 t}$$

$$|f_2(t)| \le c_2 e^{\alpha_2 t}$$

ومنه

$$\left| f_1(t)\cdot f_2(t)\right| \le \ c_1\cdot c_2\, e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

وهذا ينهي برهان النظرية .

والآن نستطيع أن نعرف جزءا كبيراً من مجال تحويل لابلاس . والتفصيل في هذه النظرية

**نظرية 1.3 :** كل اقتران متصل قِطعيا ذي ترتيب أسّي على الفترة $[0,\infty)$ هو في مجال تحويل لابلاس .

**البرهان :** لنفرض أن $f\in E\,[0,\infty)$ . إذن

$$|f(t)| \le ce^{\alpha t}$$

لبعض $c\,,\,\alpha$ في $\mathbf{R}$ . ومنه

$$\mathbf{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

ولكن

$$\int_0^\infty ce^{-st} e^{\alpha t}\ dt = \lim_{t\to\infty} c\int_0^t e^{(\alpha-s)t}dt$$

$$= c\cdot\frac{1}{s-\alpha}\lim_{t\to\infty}\left[1-e^{-(s-\alpha)t}\right]$$

وهذه النهاية موجودة فقط إذا كان $s>\alpha$ .

ومن **نظريات المقارنة** في موضوع التكامل نستنتج أن $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ موجود لكل $s>\alpha$ .

أي أن $\mathbf{L}(f)(s)$ موجود لكل $s>\alpha$ .

وهذا ينهي البرهان .

وقبل أن ننهي هذا البند نريد أن نذكرك بنظرية المقارنة في التكامل :

إذا كان $|g(t)| \le h(t)$ لكل $t>0$ وكان $\int_0^\infty h(t)\,dt$ موجود فإن $\int_0^\infty f(t)\,dt$ موجود .

# مســائــل

**الوحدة السادسة**

**بند(1)**

1- أي الاقترانات متصل قِطعيا على $[0,\infty)$ :

(1) $y(x)=\frac{1}{x}$ (2) $y(x)=[x]\,,x$ صحيح

(3) $y(x)=\sin\frac{1}{x}$ (4) $y(t)=\frac{t+1}{t-1}$

(5) $y(t)=\ln(1+t^2)$ (6) $y(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\in\mathbb{Z}\\ 1 & , \quad t\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

(7) $y(t)=e^{\frac{1}{t}}$ (8) $y(t)=\frac{\sin t}{t^2}$

2- جد لابلاس الاقترانات التالية :

(1) $y(t)=t$ (2) $y(t)=e^{at}$

(3) $y(t)=\sin at$ (4) $y(t)=t^2$

(5) $y(t)=\sinh t$ (6) $y(t)=\cosh t$

3- برهن أن $y(t)=\sqrt{t}$ اقتران ذو ترتيب أسّي .

4- برهن أنه إذا كان $f$ اقترانا ذا ترتيب أسّي فإن $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^{at}}=0$ .

## 2- خصائص أساسية لتحويل لابلاس
**( Fundumental Properties Of Laplace Tramsform )**

نذكرك بأنه إذا كان f في تحويل لابلاس $\mathbf{L}$ فإن :

$$\mathbf{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

**ما هو مجال تحويل لابلاس ؟** هذا سؤال صعب . لكننا في البند الأول استطعنا أن نجد فضاء جزئيا في مجال $\mathbf{L}$ ، الا وهو $E[0,\infty)$ وهو فضاء الاقترانات المتصلة قطعيا ذات الترتيب الأسّي . وسوف ندرس $\mathbf{L}$ فقط على $E[0,\infty)$ .

وستكون خصائص تحويل لابلاس التي سوف ندرسها هي خصائص $\mathbf{L}$ على الفضاء $E[0,\infty)$ .

وسوف نسرد هذه الخصائص على شكل نظريات منها ما سنبرهنه ومنها ما برهانه خارج نطاق هذا الكتاب ومنها ما سنتركه لك تستمتع به كيف شئت .

**نظرية 2.1 :** إن تحويل لابلاس تحويل خطي على $E[0,\infty)$ .

وبرهان هذه النظرية نتركه لك . رزق قد ساقه الله إليك فلا ترده .

**نظرية 2.2 :** إذا كان $f \in E[0,\infty)$ فإن :

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{L}(f)(s) = \lim_{s\to\infty} \hat{f}(s) = 0$$

**البرهان :** لنفرض أن $f \in E[0,\infty)$ . وحسب تعريف $E[0,\infty)$ ، هناك $c\,,\ \alpha$ ثوابت في $\mathbf{R}$ بحيث $|f(t)| \le ce^{\alpha t}$ لكل t في $[0,\infty)$ . وعليه وفق نظريات مقارنة التكاملات (والتي ذكرت في نهاية بند 1 ) نحصل على :

$$|\mathbf{L}(f)(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right|$$

$$\le c\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

$$\le \frac{c}{s-\alpha} \qquad , \quad s > \alpha$$

ومنه

$$\lim_{s\to 0}\left|\mathbf{L}(f)(s)\right| = 0$$

وبالتالي $\lim_{s\to 0}\mathbf{L}(f)(s) = 0$ . وهذا ينهي البرهان .

ومن هذه النظرية نستنتج أن $\phi(s)=1$ , $\phi(s)=s$ ، مثلا لا يمكن أن تكون في مدى $\mathbf{L}$ على $E[0,\infty)$ . أي أنه لا يوجد $f\in E[0,\infty)$ بحيث $\mathbf{L}(f)(s)=1$ أو $\mathbf{L}(f)(s)=s$ .

والسبب في ذلك أن $\lim_{s\to\infty} s \neq 0$ وكذلك $\lim_{s\to\infty} 1 \neq 0$ .

أتريد مثالاً في هذا الإتجاه ؟ إليك ذلك :

**مثال(1) :** هل $\phi(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}$ موجود في مدى $\mathbf{L}$ على $E[0,\infty)$ ؟

**الحـــل :** لنفرض أن $f\in E[0,\infty)$ . من النظرية 2.1 نستنتج أن :

$$\left|\hat{f}(s)\right| \le \frac{c}{s-\alpha} \quad , \quad s>\alpha$$

لثابت ما $\alpha$ في $\mathbf{R}$ .

ومن هذا نستنتج $s\left|\hat{f}(s)\right| \le \frac{s\cdot c}{s-\alpha}$ , $(s>0)$ .

ومنه $\lim_{s\to\infty} s\left|\hat{f}(s)\right| \le c$ . وهذا غير متحقق في $\frac{1}{\sqrt{s}}$ . بل إن $\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}=\infty$ .

وعليه $\frac{1}{\sqrt{s}}$ غير موجود في مدى $f$ على $E[0,\infty)$ .

لعل حل هذا المثال أعطانا خاصية جديدة لتحويل لابلاس نلخصها في :

**نظرية 2.3 :** إذا كان $f\in E[0,\infty)$ فإن $\lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s)$ محدود .

والآن إلى خاصية أخرى :

**نظرية 2.4 : (نظرية ليرش)**

إن تحويل لابلاس تحويل متباين على $E[0,\infty)$ بالمعنى :

إذا كان $\mathbf{L}(g)=\mathbf{L}(f)$ فإن $f(t)=g(t)$ لكل $t$ في $[0,\infty)$ ما عدا نقاط الإنفصال للاقترانين $f$ ، $g$ .

هذه نظرية صعبة البرهان . وبرهانها فوق مستوى هذا الكتاب . لكن النظرية مهمة جداً .

فالنظرية تصرح بأن تحويل لابلاس متباين شامل بين $E[0,\infty)$ وبين مداه على $E[0,\infty)$ ، بالمعنى الذي ورد في نص النظرية .

ولنضع الإصطلاح التالي :

| **ترميز** : سوف نرمز لمدى $\mathbf{L}$ على $E[0,\infty)$ بالرمز $\hat{E}[0,\infty)$ . اي أن : $$\hat{E}[0,\infty) = \{\hat{f} : \quad f \in E[0,\infty)\}$$ |
|---|

إذن نظرية ليرش تقول بأن

$$\mathbf{L} : E[0,\infty) \rightarrow \hat{E}[0,\infty)$$

هو تحويل متباين شامل ، ومتباين هو بالمعنى الذي ورد في نص النظرية من أن الاقترانين متساويين عند كل النقاط ما عدا نقاط الانفصال .

فإذا أعملنا تحويل لابلاس فقط على جزء من $E[0,\infty)$ والمكون فقط من الاقترانات المتصلة كان $L$ تحويلا متبايناً حقا . وعليه إذا كان :

| $EC[0,\infty)$ : هو فضاء الاقترانات المتصلة في $E[0,\infty)$ . |
|---|
| $\hat{EC}[0,\infty)$ : هو مجموعة صور عناصر $EC[0,\infty)$ تحت تحويل لابلاس . |

فإن نص نظرية ليرش يقول في هذه الحالة :

| إن : $$\mathbf{L} : EC[0,\infty) \rightarrow \hat{EC}[0,\infty)$$ هو تحويل متباين شامل . |
|---|

وعليه فإن $\mathbf{L}$ له نظير يسمى نظير لابلاس .

ووجود مثل هذا النظير هو الذي سيمكننا من حل معادلات تفاضلية ذات القيم الإبتدائية .

## مسـائـل

**الوحدة السادسة**

**بند(2)**

1- برهن أن $\mathbf{L}\left(\sqrt{t}\right)$ موجود .

2- هل $\mathbf{L}(f\cdot g)=\mathbf{L}(f)\cdot\mathbf{L}(g)$ ؟

3- تحقق من أن $\mathbf{L}\left(e^{t^2}\right)(s)$ غير موجود لكل قيم s .

## 3- تحويل لابلاس على المشتقات والتكاملات
## ( Laplace Transform On Derevatives And Integrals)

هذا بند يدرس : $\mathbf{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$ و $\mathbf{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)$ . وهذه من الأعمدة الرئيسية لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية .

ولنبدأ بالتفاضل .

| |
|---|
| **نظرية 3.1** : لنفرض أن $f \in EC[0,\infty)$ وهو قابل للتفاضل n من المرات وأن $f^{(n)} \in E[0,\infty)$ ، فإن : $$\mathbf{L}\left(f^{(n)}\right) = s^n \mathbf{L}(f) - s^{n-1} f(0) - \cdots\cdots - f^{(n-1)}(0)$$ |

**البرهان** : سوف نبرهن النظرية لـ $n = 1$ . أما قيم n الأخرى فإن البرهان لا يختلف مطلقاً، بل يستخدم نفس الفكرة .

والآن حيث $f' \in E[0,\infty)$ فإن $\mathbf{L}(f')$ موجود وإن :

$$\mathbf{L}(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-st} f'(t)\, dt$$

ولكن $f'(t)\, dt = df$ . إذن نستخدم التكامل بالتجزيء لنحصل على :

$$\int_0^k e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^k e^{-st} df$$

$$= e^{-st}\cdot f\Big]_0^k + \int_0^k s e^{-st} f(t)\, dt$$

وبأخذ النهاية على k نحصل على :

$$\mathbf{L}(f') = \lim_{k\to\infty}\left[e^{-sk} f(k) - f(0)\right] + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -f(0) + s\mathbf{L}(f)$$

$$= s\,L(f) - f(0)$$

وهذا ينهي البرهان .

نستطيع أن نستخدم هذه النظرية في إيجاد تحويل لابلاس لاقتران بدلالة تحويل اقتران آخر .

ومن الأمثلة على ذلك :

**مثال(1) :** جد لابلاس $f(t) = \sin 2t$ .

**الحـــل :** في المثال(4) من البند الأول من هذه الوحدة أوجدنا :

$$\mathbf{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}$$

ولكن $\sin 2t = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\cos 2t$ . ومنه

$\frac{d}{dt}\cos 2t = -2\sin 2t$ . نعمل نظرية 3.1 لنحصل على :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(-2\sin 2t) &= \mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\cos 2t\right)\\ &= s\mathbf{L}(\cos 2t) - \cos(2\cdot 0)\\ &= s\cdot\frac{s}{s^2+4} - 1\\ &= \frac{s^2-s^2-4}{s^2+4}\\ &= \frac{-4}{s^2+4}\end{aligned}$$

ومنه

$$-2\,\mathbf{L}(\sin 2t) = \frac{-4}{s^2+4}$$

إذن

$$\mathbf{L}(\sin 2t) - \frac{2}{s^2+4}$$

ماذا عن لابلاس التكامل ؟ . إليك النص التالي :

---

**نظرية 3.2 :** إذا كان $f \in E\,[0,\infty)$ فإن $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ أيضا موجود في $E\,[0,\infty)$ ، و :

$$\mathbf{L}(g) = \frac{1}{s}\,\mathbf{L}(f)$$

---

**البرهان :** أما الجزء الأول من أن $g \in E\,[0,\infty)$ فهذا مندوب لك فعله وأنت مأجور عليه .

أما برهان الجزء الثاني فهو واجب علينا . وسوف نستخدم نظرية 3.1 لبرهانه ،والتفصيل كالتالي :

حيث $g(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ ، فإن استخدام النظرية الأساسية للحسبان يعطينا $g'(t)=f(t)$ .

وباستخدام نظرية 3.1 نحصل على :

$$\mathbf{L}(g') = s\mathbf{L}(g) - g(0)$$

ولكن $g(0)=0$ . إذن $\mathbf{L}(g') = s\mathbf{L}(g)$ .

وحيث $g'(t)=f(t)$ ، فإن $\mathbf{L}(g') = \mathbf{L}(f)$ . إذن

$$\mathbf{L}(g) = \frac{1}{s}\,\mathbf{L}(g') = \frac{1}{s}\,\mathbf{L}(f)$$

وأظن أننا عملنا الواجب .

وقبل أن نستطيع إعطاء أمثلة أخرى لا بد من الرحيل إلى بند آخر لنتعرض لخصائص أخرى لتحويل لابلاس . فإلى هناك .

# مسـائـل

## الوحدة السادسة

**بند(3)**

1- جد لابلاس الاقترانات التالية :

(1) $f(t) = \sin^2 t$ (2) $f(t) = \cos^2 t$

(3) $f(t) = \cosh^2 t$ (4) $f(t) = t \sin t$

(5) $f(t) = e^t \sin t$ (6) $f(t) = \cos^3 t$

(7) $f(t) = \int_0^t x \sin x \, dx$ (8) $f(t) = \int_0^t \left[ \int_0^\theta \sin^2 x \, dx \right]$

2- إذا كان $f$ اقترانا متصلاً قطعيا وذا ترتيب أسي على الفترة $[0, \infty)$ فبرهن أن :

$$L\left( \int_a^t f(x)\, dx \right) = \frac{1}{s} L(f) - \frac{1}{s} \int_0^a f(x)\, dx$$

لكل $a > 0$ .

3- إذا كان $f$ اقترانا متصلا قطعيا وذا ترتيب أسي على $[0, \infty)$ وكان $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجوداً ، فبرهن أن

$$L\left( \frac{f(t)}{t} \right)(s) = \int_s^\infty \hat{f}(\theta)\, d\theta$$

---

## 4- تحويل لابلاس وضرب الاقترانات

**( The Laplace Of The Product )**

إذا كان $f,g \in E[0,\infty)$ فما علاقة $L(f \cdot g)$ ب $L(f)$ و $L(g)$ ؟ إنه لسؤال صعب ، ولكن نستطيع أن نجيب عليه في حالات خاصة . وهذه هي مهمة هذا البند . وفي الحقيقة سوف نتعرف على $L(t^n \cdot f)$ و $L(e^{at} f)$ عندما يكون $f \in E[0,\infty)$ .

والآن :

**نظرية 4.1** : إذا كان $f \in E[0,\infty)$ ، فإن :

$$L(t^n \cdot f) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f)$$

**البرهان** : سوف نبرهن النظرية لـ $n = 1$ . أما الحالات الأخرى فهي شبيهة الفكرة . والآن :

$$L(t\, f) = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, f(t)\, dt$$

وباستخدام نظريات الحسبان المتقدم وبالتحديد نظرية لايبنز ( Leibniz"s rule ) فإن :

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty -t\, e^{-st}\, f(t)\, dt$$

أي أن :

$$\frac{d}{ds} L(f) = -\int_0^\infty e^{-st}\, t\, f(t)\, dt$$
$$= -L(t f)$$

وهذا ينهي البرهان .

ونظرية 4.1 تؤهلنا لإيجاد $L(P(t)\, f(t))$ حيث $P(t)$ حدودية في $t$ . وإليك بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : جد لابلاس $(2t+3)\sin 5t$ .

**الحـــل** :

$$g(t) = (2t+3)\sin 5t$$
$$= 2t\sin 5t + 3\sin 5t$$

وباستخدام نظرية 2.1 ( خطيّة لابلاس ) ونظرية 4.1 نحصل على :

$$L(g) = -2\frac{d}{dt}L(\sin 5t) + 3\,L(\sin 5t)$$

$$= -2\,\frac{d}{dt}\,\frac{5}{s^2+25} + 3\,\frac{5}{s^2+25}$$

$$= \frac{20\,s}{(s^2+25)^2} + \frac{15}{s^2+25}$$

والآن ندرس الحالة الثالثة الخاصة بالضرب :

**نظرية 4.2 :** إذا كان $f \in E\,[0,\infty)$ ، فإن :

$$L(e^{at}\ f)(s) = \hat{f}(s-a)$$

**البرهان :**

$$L(e^{at}\ f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,e^{at}\,f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut}\,f(t)\,dt\ , \quad u = s-a$$

$$= \hat{f}(u)$$

$$= \hat{f}(s-a)$$

وهذا ينهي البرهان . لقد كان البرهان سهلاً ! ألا ترى ذلك ؟

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(2) :** جد لابلاس $t\,e^{-2t}\cos 5t$ .

**الحـــل :**

$$g(t) = t\,e^{-2t}\cos 5t$$

$$= t\,h(t)$$

حيث $h(t) = e^{-2t}\cos 5t$ . إذن

$$L(g) = -\frac{d}{ds}\,L(h)$$

ولكن حسب نظرية 4.2 ،

$$L(h)(s) = L(\cos 3t)(s+2)$$

وحيث أن
$$L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2+9}$$

فإن :

$$L(h) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

ومنه

$$L(g) = -\frac{d}{ds}\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$= -\frac{\left((s+2)^2+9\right)-(s+2)(2(s+2))}{\left((s+2)^2+9\right)^2}$$

$$= \frac{(s+2)^2-9}{\left[(s+2)^2+9\right]^2}$$

أتريد المزيد من الأمثلة . سوف نفعل ونعرض عليك أمثلة متميزة .

**مثال(3)** : جد لابلاس $t\,e^{2t}\sin(t+1)$ .

**الحـــل** : أولا : ليس هناك قانون لتحويل لابلاس للاقتران $\sin(t+1)$ . وعليه نعمل التالي :

$$\sin(t+1) = \sin t\cos 1 + \sin 1\cos t$$

ومنه

$$t\,e^{2t}\sin(t+1) = \cos 1\cdot\left(t\,e^{2t}\sin t\right) + \sin 1\cdot\left(t\,e^{2t}\cos t\right)$$

$$= f_1 + f_2$$

وحيث أن تحويل لابلاس خطي ، فإن :

$$L(t\,e^{2t}\sin(t+1)) = \cos 1\cdot L\left(t\,e^{2t}\sin t\right) + \sin 1\cdot L\left(t\,e^{2t}\cos t\right)$$

$$= \cos 1\left[-\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-2)^2+1}\right] + \sin 1\left[-\frac{d}{ds}\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right]$$

$$= \cos 1 \frac{2(s-2)}{\left[(s-2)^2+1\right]^2} + \sin 1 \left[\frac{2(s-2)^2-(s-2)^2-1}{\left((s-2)^2+1\right)^2}\right]$$

$$= \frac{2\cos 1 \cdot (s-2) + \sin 1 \cdot \left[(s-2)^2-1\right]}{\left[(s-2)^2+1\right]^2}$$

هل تريد مزيداً من الأمثلة . سوف نعطيك ولكن في بند منفصل ( بند المسائل المحلولة ) .

# مسائل

**الوحدة السادسة**

**بند(4)**

1- جد لابلاس الاقترانات التالية :

(1) $f(t) = t^2 + e^t \sin 2t$

(2) $f(t) = 3t^2 - e^{2t}$

(3) $f(t) = e^{-t} \cos 3t + e^{6t} - 1$

(4) $f(t) = t^2 \sin t$

(5) $f(t) = 2t^2 e^{-t} - t + \cos 4t$

(6) $f(t) = t e^{5t} \cos 2t$

(7) $f(t) = \sin 2t \ \cos 5t$

(8) $f(t) = e^{7t} \sin^2 t$

(9) $f(t) = e^{3t} \cos(2t + 4)$

(10) $f(t) = t^2 \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$

(11) $f(t) = t^2 e^{2t} f'(t)$

(12) $f(t) = e^{2t+1}(3t+1)\cos t$

(13) $f(t) = t^2 \int_0^t x^2 e^{2x} \sin x \, dx$

(14) $f(t) = e^{3t} \int_0^t x \cos 4x \, dx$

(15) $f(t) = t e^t \int_0^t x \frac{d}{dx}(e^{2x} \sin x) \, dx$

## 5- نظير لابلاس ( Laplace Inverse )

كما ذكرنا مراراً ، إن تحويل لابلاس أداة قوية لحل المعادلات التفاضلية ذات القيم الإبتدائية . فهو يحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة لا تحوي تفاضل . فهو يحول المعادلة التي تحوي على $y, y', y'', \cdots\cdots$ إلى معادلة تحوي فقط $\hat{y}(s)$ . فإذا عرفنا $\hat{y}(s)$ نريد أن نعرف $y$ وهنا يأتي دور نظير لابلاس . والذي سوف نرمز له بالرمز $L^{-1}$ .

وحتى الآن نعرف القوانين التالية :

1. $L(1) = \dfrac{1}{s}$
2. $L(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
3. $L(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$
4. $L(\cos at) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$
5. $L(\sin at) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

ومن هذه القوانين نستنتج القوانين التالية :

1. $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right) = 1$
2. $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^n}\right) = \dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
3. $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}$
4. $L^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos at$
5. $L^{-1}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right) = \sin at$

وليس غريباً أن نقول أن الكميات $\dfrac{1}{s}, \dfrac{1}{s^n}, \dfrac{1}{s-a}, \dfrac{1}{s^2+a^2}, \dfrac{s}{s^2+a^2}$ هي المقادير الأساسية ( حتى الآن ) والتي نستطيع بواسطتها معرفة الكثير . وحتى نعرف نظير لابلاس لمقدار ما في $s$ نحاول تغيير شكله وتغييره إلى أحد هذه المقادير الأساسية . والمقادير التي

يمكننا إيجاد نظير لابلاس لها حتى الآن هي المقادير التي بالشكل $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ حيث $P(s)$ , $Q(s)$

حدوديات في s ( وبشرط أن $\infty > \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}$ ) أو التي يمكن أن تحول إلى $\frac{P(s)}{Q(s)}$ .

ونلخص لك طريق إيجاد نظير لابلاس في الخطوات التالية :

[1] إن كان $\phi(s)$ ليس من الشكل $\frac{P(s)}{Q(s)}$ فلا بد من تحويله لهذا الشكل . وطريقة ذلك عن طريق التفاضل بالنسبة للمتغير s . ومن الأمثلة على ذلك :

$$\phi(s) = \tan^{-1}\frac{1}{s} \quad , \quad \phi(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

ونلاحظ كما لاحظت أنت أن :

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\right] = \frac{s+2}{s+1}\cdot\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

وكذلك

$$\frac{d}{ds}\left[\tan^{-1}\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}\left(-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{1+s^2}$$

[2] إذا كان $\phi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ، يجب وضع $\phi(s)$ بشكل مجموع مقادير ، كل منها يكون أحد المقادير الأساسية ، مع ملاحظة وجود إزاحة من حين لآخر والناتجة عن الضرب ب $e^{at}$.
إذن نحاول وضع $\phi(s)$ بالشكل :

$$\phi(s) = \frac{b_1}{(s+a_1)^n} + \frac{b_2}{(s+a_2)^2 + c_2^2} + \frac{b_3(s+a_3)}{(s+a_3)^2 + c_3^2}$$

مع ملاحظة أنه يمكن أن تكون $a_1$ أو $a_2$ أو $a_3$ مساوية للصفر .

أما كيف نقوم بذلك فهناك وسيلتان :

(i) وسيلة إكمال المربع . وهذه تستخدم عندما يكون $\phi(s)=\dfrac{a_1 s+b_1}{s^2+a_2 s+b_2}$ ، حيث $s^2+a_2 s+b_2$ غير قابلة للتحليل .

(ii) وسيلة الكسور الجزئية . وهذه تستخدم عندما يكون $\phi(s)=\dfrac{P(s)}{Q_1(s)\cdots\cdots Q_n(s)}$ ، حيث $Q_i$ حدودية إما أن تكون من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية من الشكل $s^2+b^2$.

وهنا يقع على كاهلك عملية استرجاع وتذكر ذلك الجزء من حسبان(2) المتعلق بعملية التكامل باستخدام الكسور الجزئية . وسوف نقوم باستخدام الكسور الجزئية فارضين أنك ملم بها .

والآن إلى الأمثلة التي توضح ذلك .

**مثال(1) :** جد نظير لابلاس لـ $\phi(s)=\dfrac{1}{s^2+4s-5}$ .

**الحـــل :**

$$\begin{aligned}\phi(s)&=\frac{1}{s^2+4s-5}\\&=\frac{1}{(s+5)(s-1)}\\&=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+5}\right]\end{aligned}$$

وهذه معادير أساسية .

وحيث أن تحويل لابلاس خطي فإن نظيره أيضاً خطي . إذن

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}(\phi(s)) &= \frac{1}{6}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-\frac{1}{6}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right]\\&=\frac{1}{6}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-5t}\end{aligned}$$

**مثال(2) :** جد نظير لابلاس لـ $\phi(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$ .

**الحـــل :** هنا $s^2+2s+2$ غير قابلة للتحليل . إذن نقوم بإكمال المربع لنحصل على :

$$\phi(s) = \frac{1}{(s^2+2s+2)+2-1}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

وهذا مقدار أساسي . إذن

$$\mathbf{L}^{-1}(\phi(s)) = e^{-t}\sin t$$

**مثال(3)** : جد نظير لابلاس لـ $\phi(s) = \tan^{-1}\frac{1}{s}$ .

**الحـــــل** :

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{1+s^2}$$

إذن

$$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{d\phi}{ds}\right) = -\sin t$$

ولكن هل تذكر قانون $\mathbf{L}(\,t\,f(t)\,)$ . نذكرك به :

$$\mathbf{L}(t\,f(t)) = -\frac{d}{dt}\phi(s) \;,\; \phi(s) = \hat{f}(s)$$

إذن

$$t\,f(t) = -\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}\hat{f}(s)\right)$$

وعليه

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}\hat{f}(s)\right)$$

إذن في حالتنا إذا كان $\mathbf{L}(\,f\,) = \phi$ ، فإن :

$$f(t) = -\frac{1}{t}\,\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{t}\sin t$$

وعليه

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}(\phi(s)) = -\frac{\sin t}{t}$$

سؤال جميل ألا ترى ذلك .

## مســـائـــل

الوحدة السادسة

**بند(5)**

جد نظير لابلاس لما يلي :

(1) $\frac{1}{s(s+1)}$

(2) $\frac{3}{(s-1)^2}$

(3) $\frac{1}{s(s+2)^2}$

(4) $\frac{5}{s^2(s-5)^2}$

(5) $\frac{1}{s^2+4s+29}$

(6) $\frac{2s}{2s^2+1}$

(7) $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

(8) $\frac{1}{(s^2+4)^3}$

(9) $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$

(10) $\frac{2s^3}{(s^2+1)^3}$

(11) $\frac{1}{s^4+1}$

(12) $\frac{3s}{(s+1)^4}$

(13) $\ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$

(14) $\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)$

## 6- تحويل لابلاس والمعادلات التفاضلية
## ( Laplace Transform And Differential Equations )

قضية هذا البند هو حل المعادلات التفاضلية .

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

بالشروط

$$y(0) = b_0 \ , y'(0) = b_1 \ , \cdots\cdots\cdots \ , \ y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

والعوامل $a_1 , a_2 , \cdots\cdots , a_n$ قد تكون ثوابت وقد تكون اقترانات في $x$ .

وسوف نعالج الحالتان : حالة $a_n$ عندما تكون على شكل ثوابت وحالة $a_n$ قد يكون بعضها اقترانات في $x$ .

وفي كلتا الحالتين طريق الحل هي :

1. نؤثر بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة .
2. نستخدم قانون تحويل لابلاس على التفاضل .
3. نحصل في النهاية على :

$$\hat{y}(s) = \phi(s)$$

4. نؤثر بنظير لابلاس لنحصل على :

$$y(x) = \mathbf{L}^{-1}(\phi)$$

والآن لنحل أمثلة في حالة العوامل ثوابت .

**مثال(1) :** حل المعادلة :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad , \ y(0)=3 \ , y'(0) = 4$$

**الحل :** نتبع الخطوات السابقة :

$$\mathbf{L}(y'' - 3y' + 2y) = \mathbf{L}(0)$$

إذن

$$\mathbf{L}(y'') - 3\mathbf{L}(y') + 2\mathbf{L}(y) = 0$$

ومنه

$$\left[s^2 \hat{y}(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 3\left[s\,\hat{y}(s) - y(0)\right] + 2\hat{y}(s) = 0$$

نبسط لنحصل على :

$$s^2\hat{y}(s)-3s\hat{y}(s)+\hat{y}(s)=sy(0)+y'(0)-3y(0)$$
$$= s\cdot 3+4-9$$

إذن

$$\hat{y}(s)=\frac{3s-5}{s^2-3s+2}$$
$$=\frac{3s-5}{(s-2)(s-1)}$$
$$=\frac{1}{s-2}+\frac{2}{s-1}$$

وبالتالي :

$$y=\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+2\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$
$$=e^{2t}+2e^{t}$$

**مثال(2) :** حل المعادلة :

$$y''-y=x-2 \quad , \; y(2)=3 \; , y'(2)=0$$

**الحـــل :** هل لاحظت شيئاً غريباً في هذه المسألة .

أحسنت ، فالشروط الإبتدائية أعطيت عند $x=2$ وليس عند $x=0$ . ما العمل ؟ إليك البيان:

ضع $z(x)=y(x+2)$ . ومنه نحصل على $z'(x)=y'(x+2)$ ، وكذلك $z''(x)=y''(x+2)$ .

نعود إلى المعادلة ونضع مكان $x$ المقدار $x+2$ .

تصبح المعادلة :

$$y''(x+2)-y(x+2)=(x+2)-2$$

وبالتعويض الآن عن $y$ بدلالة $z$ ، نحصل على :

$$z''(x)-z(x)=x \;\cdots\cdots\cdots(*)$$

ولكن ما هي الشروط الآن ؟ ألا تعلم أن كل هذه المعركة هي من أجل نقل الشروط الإبتدائية من $x=2$ إلى $x=0$ . ولقد نجحنا في ذلك فإن :

$$z(0)=y(0+2)=y(2)=3$$
$$z'(0)=y'(0+2)=y'(2)=0$$

إذن معادلتنا (*) جاهزة للحل .

$$\mathbf{L}(z'') - \mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(x)$$

ومنه

$$\left[s^2 \hat{z} - sz(0) - z'(0)\right] - \hat{z} = \frac{1}{s^2}$$

إذن

$$(s^2 - 1)\hat{z} = \frac{1}{s^2} + sz(0) + z'(0)$$

وبالتعويض عن الشروط نحصل على :

$$\hat{z} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{3s}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + 3\frac{s}{s^2+1}$$

وباستخدام نظير لابلاس نحصل على :

$$z(x) = x^2 - \sin x + 3\cos x$$

ولكن $z(x) = y(x+2)$ . إذن

$$y(x+2) = x^2 - \sin x + 3\cos x$$

ومنه

$$y(x) = (x-2)^2 - \sin(x-2) + 3\cos(x-2)$$

ربما نكتفي بهذه الأمثلة كي ننتقل إلى الحالة الثانية حيث العوامل قد يكون فيها اقترانات في $x$ . وسنعالج هذه الحالة عبر الأمثلة .

**مثال(3) :** حل المعادلة

$$y'' + 3xy' - 6y = 0 \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$$

**الحـــل :** نتبع نفس الخطوات في الأمثلة السابقة :

$$\mathbf{L}(y'') + 3\mathbf{L}(xy') - 6\mathbf{L}(y) = \frac{1}{s}$$

وباستخدام قانون تحويل لابلاس على التفاضل والضرب بـ $x$ نحصل على :

$$\left[s^2\hat{y}-sy(0)-y'(0)\right]-3\frac{d}{ds}\left[s\hat{y}-y(0)\right]-6\hat{y}=\frac{1}{s}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية نصل إلى :

$$s^2\hat{y}-3\left[s\frac{d\hat{y}}{ds}+\hat{y}\right]-6\hat{y}=\frac{1}{s}$$

ومنه

$$\frac{d\hat{y}}{ds}+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)\hat{y}=\frac{-1}{3s^2}$$

هذه معادلة خطيّة في $\hat{y}$ . فهي من الشكل :

$$z'+P(s)\,z=Q(s)$$

حيث $z=\hat{y}$ .

وبحل المعادلة الخطية نحصل على :

$$\hat{y}=e^{-\int P(s)ds}\left[\int e^{\int P(s)ds}\cdot Q(s)\,ds+C\right]$$

$$=e^{-3\int\frac{1}{s}ds+\frac{1}{3}\int s\,ds}\left[\int e^{3\int\frac{1}{s}ds-\int\frac{s}{3}ds}\cdot\frac{-1}{3s^2}\,ds+C\right]$$

$$=\frac{1}{s^3}e^{\frac{s^2}{6}}\left[\int\frac{-s^3}{6s^2}e^{-\frac{s^2}{6}}\,ds+C\right]$$

$$=\frac{1}{s^3}e^{\frac{s^2}{6}}\left[e^{-\frac{s^2}{6}}+C\right]$$

$$z(s)=\frac{1}{s^3}+C\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$$

وحيث ان $z(s)=\hat{y}(s)$ ، فإن $\lim\limits_{s\to\infty}z(s)=0$ كما سلف في البند الثاني ( نظرية2.2) .

من هذا نستنتج أن $C=0$ . وعليه $\hat{y}(s)=\frac{1}{s^3}$ .

إذن :

$$y=\mathbf{L}^{-1}(\hat{y})=\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)=\frac{x^2}{2}$$

وهذا ينهي حل المسألة .

إذن في مثل هذه المسائل نستخدم نظرية2.2 ( في البند الثاني ) كي نجد ثابت ( أو ثوابت التكامل ) عندما نحل المعادلة في $\hat{y}$ والناتجة من تأثير تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية ذات العوامل المتغيرة . وسوف نحل مسألة أخرى على هذا النمط في بند حل المسائل لهذه الوحدة .

---

# مســـائــل

الوحدة السادسة

**بند(6)**

حل المعادلات التالية :

(1) $y'' + y = e^{-2t}\sin t \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$

(2) $y'' + 4y' + 4y = \cos t \quad , \; y(0) = 1, y'(0) = 0$

(3) $y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \; y(0) = 1, y'(0) = 0$

(4) $y'' + y' - 2y = e^{-t}\sin t \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$

(5) $y'' + 3y' + 2y = t^2 \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 4\cos 2t \quad , \; y(0) = y'(0) = 1$

(7) $y'' + 2y' + y = e^{t} \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$

(8) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \cos t \quad , \; y(0) = \frac{3}{25}, y'(0) = -\frac{4}{25}$

(9) $y'' + 2y' + 3y = 3t \quad , \; y(0) = 0, y'(0) = 1$

## 7- تحويل لابلاس والاقترانات الخاصة
## ( Laplace Transform And Special Functions )

في هذا البند سوف ندرس تحويل لابلاس لاقترانين متميزين مهمين في كثير من أفرع العلوم . هذان الاقترانان هما :

(i) اقتران القفزة .

(ii) الاقتران الدوري .

ولنبدأ البيان .

### (i) اقتران القفزة .

**تعريف 7.1 :** اقتران القفزة هو الاقتران :

$$\mathbf{u_a} : [0,\infty) \to \mathbf{R}$$

بحيث

$$\mathbf{u_a}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

وميزة هذا الاقتران أنه يسهل علينا إيجاد تحويل لابلاس للاقترانات من الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 \le x \le a_1 \\ f_2(x) & 0 < x \le a_2 \\ f_3(x) & a_2 < x \le a_3 \\ & \vdots \\ f_n(x) & a_{n-1} < x \end{cases}$$

إذ يمكننا استخدام $\mathbf{u_a}(t)$ لإعادة كتابة الاقتران $f$ .

وإليك بعض الأمثلة .

**مثال(1) :** أعد كتابة الاقتران التالي باستخدام اقتران القفزة :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

**الحل :** حيث أن

$$u_2(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le 2\\ 1 & t>2\end{cases}$$

فإن $f(t)=1-u_2(t)$ .

**مثال(2)** : أعد كتابة الاقتران التالي باستخدام اقتران القفزة :

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t\le \pi\\ t & \pi<t\le 5\pi\\ 1 & t>5\pi\end{cases}$$

**الحـــل** : لا بد من الملاحظة أنه إذا كان $a<b$ ، فإن :

$$u_a(t)-u_b(t)=\begin{cases}1 & a\le t\le b\\ 0 & t>b\end{cases}$$

وعليه فإننا نستطيع أن نكتب $f(t)$ على الشكل :

$$f(t)=\sin t\,(1-u_\pi(t))+t\,(u_\pi(t)-u_{5\pi}(t))+u_{5\pi}(t)$$

وهنا لا بد أن نلفت نظرك إلى أن الاقتران $u_0(t)$ هو الاقتران الثابت $f(t)=1$ لكل $t$ في $(0,\infty)$ .

من الأمثلة السابقة نستطيع أن نكتب لك قاعدة عامة عن شكل $f$ بدلالة اقتران القفزة .

**قاعدة(1)** : لنفرض $f:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ معطى بالشكل

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & 0\le t<a_1\\ f_2(t) & a_1\le t<a_2\\ f_3(t) & a_2\le t<a_3\\ \vdots & \\ f_n(t) & t\ge a_{n-1}\end{cases}$$

فإن :

$$f(t)=f_1(t)\,(1-u_{a_1}(t))+f_2(t)\,(u_{a_1}(t)-u_{a_2}(t))+\cdots\cdots+f_n(t)\,u_{a_{n-1}}(t)$$

ولا بد من الملاحظة أن قيم $f$ عند النقاط $\{a_1 , \cdots\cdots , a_{n-1}\}$ ليس بالأمر المهم طالما بقي الاقتران متصلاً قطعياً . إذ أن تكامل اقتران ما على الفترة $[0 , \infty)$ لا يتغير إذا تغيرت قيم $f$ عند عدد محدود من النقاط في $[0 , \infty)$ .

والآن عودة إلى تحويل لابلاس . والقضية التي تهمنا هو إيجاد تحويل لابلاس للاقترانات التي ورد شكلها في قاعدة (1) . وعليه نحن بحاجة للنظرية المهمة التالية :

**نظرية 7.1 : ( نظرية الإزاحة )**

إذا كان $f \in \mathbf{E}[0,\infty)$ ، فإن :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_a(t)\, f(t)) = e^{-as}\, \mathbf{L}(\, f(t+a)\,)$$

**البرهان :** نعود فقط إلى تعريف تحويل لابلاس :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_a(t)\, f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{u}_a(t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

وذلك عندما استخدمنا تعريف $\mathbf{u}_a(t)$ ، فهو يساوي صفر على $[0 , a)$ . والآن نريد من التكامل أن يبدأ من الصفر ، ولكن دون اقحام اقتران القفزة . وهذا يتم عن طريق التعويض : $t = x + a$ . ومنه $dt = dx$ وكذلك $x = 0$ إذا كان $t = a$ . إذن

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_a(t)\, f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-s(x+a)}\, f(x+a)\, dt$$

$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sx}\, f(x+a)\, dt$$

$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-st}\, f(t+a)\, dt$$

$$= e^{-sa}\, \mathbf{L}(f(t+a))$$

وهذا ينهي البرهان .

ولعلك في شوق إلى مثال . سنطفئ ظمأ الشوق بالمثال التالي :

**مثال(3) :** جد لابلاس الاقتران

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 2 \\ \sin t & t > 0 \end{cases}$$

**الحــــل :** نعيد كتابة الاقتران $f$ بدلالة اقتران القفزة :

$$f(t) = \mathbf{u}_2(t)\sin t$$

وعليه ، وباستخدام نظرية الإزاحة :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &= e^{-2s}\,\mathbf{L}(\sin(t+2)) \\ &= e^{-2s}\,\mathbf{L}[\sin t\cdot\cos 2+\cos t\cdot \sin 2] \\ &= e^{-2s}\cos 2\cdot\frac{1}{s^2+1} + e^{-2s}\sin 2\,\frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

هل تريد مثالاً آخر ؟

**مثال(4) :** جد لابلاس الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ e^x & 1 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

**الحــــل :** نكتب $f$ وفق قاعدة(1) لنحصل على :

$$f(x) = (1-\mathbf{u}_1(x))\,x^2 + (\mathbf{u}_1(x)-\mathbf{u}_4(x))\,e^x + \mathbf{u}_4(x)$$

ومنه

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &= \mathbf{L}[(1-\mathbf{u}_1(x))\,x^2\,] + \mathbf{L}[(\mathbf{u}_1(x)-\mathbf{u}_4(x))\,e^x] + \mathbf{L}(\mathbf{u}_4(x)) \\ &= \mathbf{L}(x^2) - \mathbf{L}(\mathbf{u}_1(x)\cdot x^2) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_1(x)\cdot e^x) - \mathbf{L}(\mathbf{u}_4(x)\,e^x) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_4(x)\cdot 1) \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية الإزاحة نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\,\mathbf{L}\left[(x+1)^2\right] + e^{-s}\mathbf{L}(e^{x+1}) - e^{-4s}\,\mathbf{L}\left[e^{x+4}\right] + e^{-4s}\,\mathbf{L}(1) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right] + e^{-s}\cdot e\,\frac{1}{s-1} - e^{-4s}\cdot e^4\,\frac{1}{s-1} + e^{-4s}\,\frac{1}{s} \end{aligned}$$

هل تريد أن نبسط لك هذا المقدار . لن نفعل !

والآن ننتقل بك إلى الاقتران الدوري .

**تعريف 7.2:** نقول أن الاقتران $f:[0,\infty)\to \mathbf{R}$ اقتران دوري بدورة مقدارها $\tau$ إذا كان $f(t+\tau)=f(t)$ لكل $t$ في $[0,\infty)$ .

ومن أمثلة الاقترانات الدورية والتي تعرفت عليها في دراستك للحسبان : $f(x)=\sin x$ ودورته $\tau=2\pi$ ، $f(x)=\cos x$ ودورته $\tau=2\pi$ ، $f(x)=\tan x$ ودورته $\tau=\pi$ .

ويمكن ذكر خاصيتين أساسيتين للاقترانات الدورية :

1- إذا كان $f$ دوريا بدورة مقدارها $\tau$ فإنه دوري بدورة مقدارها $2\tau$ . وبالتالي دوري بدورة مقدارها $3\tau$ ، $4\tau$ ، .......... .

2- لمعرفة اقتران دوري ( على مجاله) ، يكفي معرفة $f$ على إحدى الفترات $[0,\tau]$ ، $[\tau,2\tau]$ ، ....... .

والآن ما هو تحويل لابلاس للاقتران الدوري . الجواب في النظرية التالية :

**نظرية 7.2 :** إذا كان $f$ اقتراناً دورياً وعنصراً في $E[0,\infty)$ ، فإن .

$$L(f)=\frac{\int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-\tau s}}$$

حيث $\tau$ هي دورة الاقتران $f$ .

**البرهان :** من التعريف :

$$L(f)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

وحيث أن $f$ دوري بدورة مقدارها $\tau$ ، فإن :

$$L(f) = \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{\tau}^{2\tau} e^{-st} f(t)\,dt + \cdots\cdots$$

$$= \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt + \int_0^{\tau} e^{-s(t+\tau)} f(t)\,dt + \cdots\cdots$$

$$= \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt \left[1 + e^{-\tau t} + e^{-2\tau t}\right]$$

$$= \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt \left[\sum_0^{\infty} \left(e^{-\tau s}\right)^n\right]$$

ومن قانون المتسلسلة الهندسية : $\sum_0^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

نحصل على :

$$L(f) = \frac{\int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt}{1 - e^{-\tau s}}$$

وهذا ينهي البرهان .

والآن إلى بند آخر .

# مســائــل

**الوحدة السادسة**

**بند(7)**

جد لابلاس الاقترانات التالية :

$$(1)\quad f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{1}{2}\\ 1+t & t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(2)\quad f(t)=\begin{cases}t & t<2\\ 2 & t\ge 2\end{cases}$$

$$(3)\quad f(t)=\begin{cases}\sin t & t<2\pi\\ 0 & t\ge 2\pi\end{cases}$$

$$(4)\quad f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{\pi}{2}\\ \cos t & \frac{\pi}{2}\le t<\frac{3\pi}{2}\\ 0 & t\ge\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$(5)\quad f(t)=\begin{cases}t & t<2\\ 8-3t & 2\le t<3\\ t-4 & 3\le t<4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$

حل المعادلات التالية :

$$(6)\quad y^{(4)}+y=\begin{cases}0 & 0\le t\le 1\\ t-1 & t>1\end{cases}$$

$$(7)\quad y''+2y'+y=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

$$(8)\quad y''+y=\mathbf{u}_{\pi}(t)\quad ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

## 8- التــلاف (Convolution)

موضوع التلاف من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية والهندسة . وسوف نعرضه عليك موضوعاً رياضياً بحتاً لا شيّة فيه . فإلى التعريف ندعوك :

| **تعريف 8.1 :** لنفرض أن f , g اقترانان متصلان قطعياً على $[0,\infty)$ . إن تلاف f و g هو الاقتران الذي سنرمز له بالرمز $f * g$ والمعرف بالشكل : $$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$ |
|---|

وبرهان النظرية التالية يحتاج إلى تحليل متقدم ولذلك رفع الله عنك تكليف فهمه . ونطلب منك إدراك منطوق ومفهوم نص النظرية .

| **نظرية 8.1 :** إذا كان $f , g \in \mathbf{E}[0,\infty)$ ، فإن $f * g \in \mathbf{E}[0,\infty)$ |
|---|

هل تريد بعض الأمثلة على التلاف . سنسايرك في ذلك .

**مثال(1) :** جد $1 * 1$ .

**الحـــل :** حسب التعريف :

$$(1 * 1)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\,dx = 1$$

**مثال(1) :** جد $\sin t * 1$ .

**الحـــل :** مرة أخرى نعمل التعريف لنحصل على :

$$\begin{aligned}(\sin t * 1)(t) &= \int_0^t \sin(t-x)\cdot 1\,dx \\ &= \int_0^t \sin t\cdot\cos x - \cos t\cdot\sin x\,dx \\ &= \sin t\,[\sin t - 0] - \cos t[-\cos t + 1] \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t - \cos t \\ &= 1 - \cos t\end{aligned}$$

لعلك لاحظت أن عملية التلاف هي عملية مغلقة على $\mathbf{E}[0,\infty)$ ، حيث ذلك ما أكدته لنا

نظرية 7.1 . وعملية التلاف لها خصائص أخرى نترك برهانها لك كي تستمتع بروعة استنباطه .

وهذه الخصائص نوردها في النظرية التالية .

**نظرية 8.2** : لنفرض أن $f, g, h \in \mathbf{E}[0,\infty)$ . فإن

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. $f * 0 = 0$

إذن عملية التلاف عملية إبدالية ، تجميعية ، وتتوزع على الجمع . لكنك لاحظت من مثال(1) أن $f(t) = 1$ ليس عنصراً محايداً للعملية * . بل إن الحقيقة المرّة أن عملية التلاف على $\mathbf{E}[0,\infty)$ ليس لها عنصر محايد . وهذا الأمر ليس سهل البرهان .

والآن ما علاقة عملية التلاف بتحويل لابلاس والجواب في النظرية الجميلة التالية :

**نظرية 8.3** : لنفرض أن $f, g \in \mathbf{E}[0,\infty)$ . فإن

$$\mathbf{L}(f * g) = \mathbf{L}(f) \cdot \mathbf{L}(g)$$

**البرهان** : وفق تعريف التلاف وتحويل لابلاس نحصل على :

$$\mathbf{L}(f * g) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-x)\, g(x)\, dx\, dt$$

وهذا تكامل ثنائي على المنطقة المحدود بـ :

$$0 \le x \le t \quad , \quad 0 \le t \le \infty$$

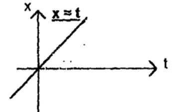



Fig.(1)

ومن معلوماتنا التي اكتسبناها من مادة حسبان(3) ، إذا أردنا تغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$\mathbf{L}(f*g)=\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}e^{-st}f(t-x)\,g(x)\,dt\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty}g(x)\left(\int_x^{\infty}e^{-st}f(t-x)\,dt\right)dx$$

ويمكننا التعويض في التكامل الداخلي : $y=t-x$ ، لنحصل على

$$\mathbf{L}(f*g)=\int_0^{\infty}g(x)\int_0^{\infty}e^{-sy}e^{-sx}f(y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-sx}g(x)\,dx\cdot\int_x^{\infty}e^{-sy}f(y)\,dy$$

$$=\mathbf{L}(f)\cdot\mathbf{L}(g)$$

وهذا ينهي البرهان .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(3)** : جد تحويل لابلاس للاقتران $\sin t * \cos t$ .

**الحـــل :**

$$\mathbf{L}(\sin t*\cos t)=\mathbf{L}(\sin t)\cdot\mathbf{L}(\cos t)$$

$$=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

$$=\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

ونستنتج من نظرية7.3 ، نظرية تتعلق بنظير لابلاس .

**نظرية8.4** : إذا كان $\phi_1(s)$ , $\phi_2(s)$ موجودان في $\hat{E}[0,\infty)$ ، فإن :

$$L^{-1}(\phi_1 \cdot \phi_2) = L^{-1}(\phi_1) * L^{-1}(\phi_2)$$

وهذه فقط إعادة صياغة (أو كتابة ) نظرية7.3 .

**مثال(4)** : جد نظير لابلاس لـ : $\phi(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$ .

**الحـــل :**

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

وعليه :

$$L^{-1}(\phi) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= t * e^{-t}$$

**مثال(5)** : جد $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right)$ .

**الحـــل :**

$$\phi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

ومنه

$$L^{-1}(\phi) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= 1 * \sin t$$

ونقف هنا لننهي هذا البند كي نبحر معاً إلى أطراف نهاية هذه الوحدة .

## 8- أمثلة متنوعة ( Solved Examples )

نعرض لك في هذا البند مجموعة من الأمثلة المحلولة هي في غاية الجمال .

**مثال(1)** : جد لابلاس الاقتران $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ .

**الحل** : حيث أن $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

فإن $\sin t = t\, f(t)$ . ومنه

$$\mathbf{L}(\sin t) = \mathbf{L}(t\, f(t)) = -\frac{d}{ds}\mathbf{L}(f(t))$$

وعليه

$$\frac{d}{ds}\mathbf{L}(f(t)) = -\frac{1}{s^2+1}$$

وعليه

$$\hat{f}(s) = -\tan^{-1} s + C$$

ولكن حتى يكون $\hat{f}(s)$ هو تحويل لابلاس لاقتران ما ، فإن الشرط $\lim\limits_{s\to\infty}\hat{f}(s) = 0$ لا بد أن يتحقق . وحيث أن $\lim\limits_{s\to\infty}\tan^{-1} s = \dfrac{\pi}{2}$ ، فإن $C = \dfrac{\pi}{2}$ . وعليه

$$\mathbf{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

**مثال(2)** : جد لابلاس الاقتران $f(t) = e^{2t-1}\int_0^t x^{127} e^x\, dx$ .

**الحل** : هنا $f(t) = e^{2t-1}\cdot g(t)$ حيث $g(t) = \int_0^t x^{127} e^x\, dx$ . إذن

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \mathbf{L}(e^{2t-1}\cdot g(t))\\ &= \mathbf{L}(e^{2t}\cdot e^{-1}\cdot g(t))\\ &= e^{-1}\,\mathbf{L}(g(s-2))\end{aligned}$$

ولكن حسب نظرية 3.2 ، فإن $\hat{g}(s) = \dfrac{1}{s}\mathbf{L}(e^t\cdot t^{127})$ .

ولكن من نظرية 4.1 ومن قانون $\mathbf{L}(t^n)$ ، فإن :

$$\hat{g}(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{(127)!}{(s-1)^{128}}\right]$$

وعليه

$$\hat{f}(s)=e^{-1}\cdot\frac{1}{s-2}\cdot\frac{(127)!}{(s-3)^{128}}$$

**مثال(3)** : إذا كان $f\in E[0,\infty)$ ، فبرهن أن هناك $a>0$ بحيث أن $g(s)=s\,\hat{f}(s)$ هو اقتران محدود على $[a,\infty)$ .

**الحـــــل** : حيث أن $f\in E[0,\infty)$ ، فإن

$$|f(t)|\le m\,e^{\alpha t}$$

ومنه $|\hat{f}(s)|\le\frac{m}{s-\alpha}$ . وعليه

$$|s\hat{f}(s)|\le m\cdot\frac{s}{s-\alpha}$$

وحيث أن $\lim_{s\to\infty}\frac{ms}{s-\alpha}=m$ ، فإن $s\hat{f}(s)$ محدود في بعض جوار $\infty$ . أي أن هناك $a$ بحيث $s\hat{f}(s)$ محدود على $(a,\infty)$ .

ما ألطف هذا البرهان وأقصره .

**مثال(4)** : جد لابلاس $f(t)=e^{2-t}\sin(2t+1)$ .

**الحـــــل** :

$$f(t)=e^{2}\cdot e^{-t}\,[\sin 2t\cos 1+\cos 2t\sin 1]$$
$$=e^{2}\cos 1\cdot e^{-t}\sin 2t+e^{2}\sin 1\,e^{-t}\cdot\cos 2t$$

وعليه

$$\hat{f}(s)=e^{2}\cos 1\frac{2}{(s+1)^{2}+4}+(e^{2}\sin 1)\cdot\frac{s+1}{(s+1)^{2}+4}$$

**مثال(5)** : جد نظير لابلاس $\phi(s)=\frac{1}{s(s-1)}$ .

**الحـــــل** :

هناك طريقتان لحل هذه المسألة . أما الطريقة الأولى فهي طريقة الكسور الجزئيةوقد سلف

أن عرضنا بعض الأمثلة عليها ، ونتركها لك الآن . أما الطريقة الثانية فهي طريقة التلاف :

$$\phi(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-1}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}(\phi(s)) &= \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= 1 * e^{t} \\ &= \int_0^t e^{t-x}\,dx \\ &= e^{t}\cdot\int_0^t e^{-x}\,dx = e^{t}\cdot\left[-e^{-x}\right]_0^t \\ &= -1 + e^{t} \end{aligned}$$

**مثال(6)** : جد نظير لابلاس $\phi(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ .

**الحـــل** :

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}(\phi(s)) &= \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) * \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= \sin t * \sin t \end{aligned}$$

وإذا أجرينا حساب التلاف لوجدنا :

$$\sin t * \sin t = \frac{\sin t - t\cos t}{2}$$

إذن

$$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{\sin t}{2} - \frac{t\cos t}{2}$$

**مثال(7)** : حل المعادلة

$$y'(t) = 1 - y * e^{-2t}\quad,\quad y(0) = 1$$

**الحـــل** : نأخذ لابلاس الطرفين للمعادلة لنحصل على :

$$s\,\hat{y}(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \hat{y}(s)\cdot\frac{1}{s+2}$$

ومنه

$$s\,\hat{y}(s) + \frac{1}{s+2}\,\hat{y}(s) = \frac{1}{s} + 1$$

وهذا يعني

$$\hat{y}(s) = \frac{s+2}{s\,(s+1)}$$

وبطريقة الكسورالجزئية نحصل على :

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}$$

ومنه نحصل على :

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$
$$= 2 - e^{-t}$$

نكتفي بهذا العدد من الأمثلة لننهي وحدة ال لابلاس .

---

# مســـائـل

**الوحدة السادسة**

**بند(8)**

جــد :

(1) $e^{at} * e^{bt}$ (2) $t * \cos at$

(3) $1 * 1$ (4) $t * e^{at}$

جد حلاً للمعادلات التالية :

(5) $y = 4t - 3 - \sin t * y$

(6) $y = 3\sin t - 2\cos t * y$

(7) $y = \sin t + 4e^{-t} - 2\cos t * y$

(8) $y = t - t * y$

(9) $y = t - e^{t} * y$

(10) $y = \cos t + e^{t} * y$

جد نظير لابلاس للاقترانات التالية باستخدام التلاف :

(11) $\dfrac{1}{s^2 - 3s + 2}$ (12) $\dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$

(13) $\dfrac{1}{s^2 + 2s^2 - s - 2}$ (14) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

(15) $\dfrac{s}{(s-1)(s^2+1)}$ (16) $\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

(17) $\dfrac{1}{s(s^2 + 4s + 13)}$ (18) $\dfrac{1}{s(s^2 + 16)}$

# الوحدة السابعة

## الحل بالمتسلسلات

**" Series Solution "**

في حل المعادلات التفاضلية ذات العوامل المتغيرة ، لم يكن لدينا طرق أو خيارات كثيرة ،وكانت المعادلة الوحيدة من هذا النوع القادرون على حلّها حلاً كاملاً هي معادلة أيلر . والحل بالمتسلسلات هو من الطرق القوية وذات الفعالية لحل المعادلات التفاضلية ذات العوامل المتغيرة . والغاية من هذا البند هو إثبات وجهة نظرنا هذه .

## 1- معلومات عامة .

نعلم أنك تعرف الكثير عن المتسلسلات من خلال دراستك لمادة الحسبان . ولكن نريد أن نذكرك ليس غير . فربما تراكمت فوق قرص ذاكرتك بعض الأتربة .

تعرف أن أفضل أنواع الإقترانات التي يحلم بها العامل في حقل الرياضيات هي

الحدوديات : $P(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ . ولكن هناك اقترانات جميلة كالحدوديات مثل $f(x) = e^x$ , $f(x) = \sin x$ , ...... . فهل يمكن تمثيل هذه الاقترانات بشكل يشبه الحدوديات ؟ هنا تظهر غاية المتسلسلات الأسية .

وهناك نظرية أساسية تعلمتها في الحسبان هي :

**نظرية 1.1 (تيلر)** : إذا كان $x_0 \in \mathbf{R}$ وكان $f$ اقتراناً معرفاً على فترة $I$ تحوي $x_0$ وله مشتقة من كل الرتب على $I$ وكان $\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(z)\,(x-x_0)^{n+1}}{n!} = 0$ ، حيث $z$ تقع بين $x$ و $x_0$ ، فإن $f$ يمكن تمثيله بالشكل .

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n}{n!} \quad .........(1)$$

وهذا التمثيل صحيح في فترة ما حول $x_0$ لتقل $J$ . $I \supseteq J$

تسمى المتسلسلة (1) مسلسلة تيلر . إذا كان $x_0 = 0$ ، فإنها تسمى مسلسلة ماكلورين .

وباستخدام هذه النظرية استطعنا في مادة الحسبان تمثيل كثيراً من الإقترانات بشكل متسلسلات أسية . ومن الأمثلة :

$$\text{(i)} \quad e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \; x \in \mathbf{R}$$

$$\text{(ii)} \quad \sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad , \; x \in \mathbf{R}$$

$$\text{(iii)} \quad \cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad , \; x \in \mathbf{R}$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n \qquad , \; x \in (-1, 1)$$

والفترة التي تمثل فيها المتسلسلة الاقتران تسمى فترة التقارب . ولعلك تذكر أن طريقة إيجاد

فترة التقارب للمتسلسلات الأسية هي باستخدام اختيار النسبة . ومن أشهر النظريات في هذا الإتجاه هي :

> **نظرية 1.2 :** إذا كانت المتسلسلة $\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n$ تمثل الاقتران f على فترة ما I ، حول $x_0$ ، فإن :
>
> $f'(x) = \sum_1^\infty a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$ لكل x في I ، وكذلك
>
> $\int f(x)\,dx = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$ لكل x في I .

ويمكن استخدام هذه النظرية لإيجاد متسلسلات كثيراً من الاقترانات . ومن الأمثلة على ذلك :

**مثال(1)** : جد متسلسلة أسيّة حول $x_0 = 0$ لكل من :

$$\text{(i)}\ f(x) = \ln|1+x| \quad , \quad \text{(ii)}\ f(x) = \tan^{-1} x$$

**الحـــل :** (i) هنا نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
\ln|1+x| &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= \int_0^\infty \left( \sum_0^\infty (-1)^n t^n \right) dt \\
&= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

(ii) قبل البدء في هذا الجزء يجب أن تذكر القانون ( من مادة حسبان ) .

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n u^n \quad , \quad u \in (-1,1)$$

والآن

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^\infty \left( \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \right) dx \\
&= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

وننهي هذا البند بإعطاء إسم لتلك الإقترانات التي لها متسلسلة أسيّة حول نقطة ما .

**تعريف 1.1 :** يسمى الاقتران $f$ تحليلي حول النقطة $x_0$ إذا كان $f$ له متسلسلة أسيّة حول $x_0$ بحيث $f(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ لكل $x$ في فترة ما حول $x_0$ .

# مـســـائـــل

## الوحدة السابعة

### بند(1)

جد متسلسلة الاقترانات التالية حول النقطة المعطاة .

(1) $f(x) = \ln x \quad , x_0 = 1$

(2) $f(x) = e^x \quad , x_0 = \frac{\pi}{2}$

(3) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad , x_0 = 0$

(4) $f(x) = \sin x \quad , x_0 = \frac{\pi}{2}$

(5) $f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad , x_0 = 0$

(6) $\int_0^x e^{t^2}\, dx \quad , x_0 = 0$

## 2- حـل المعـادلات بمسلسلة تـيلـر ( Taylor Series Method )

ملخص هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية حول نقطة ما هو :

إذا كانت المعادلة التفاضلية مثلاً : $y' = f(x,y)$ ، فإننا نفرض أن $y$ له متسلسلة تيلر تمثله حول نقطة ما $x_0$ . وبذلك يكون $y(x) = \sum_0^\infty \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ .

وبالتالي نعرف $y$ تماماً إذا عرفنا المقادير $y^{(n)}(x_0)$ .

ونحصل علي تلك المقادير باستخدام المعادلة التفاضلية .

وإليك بيان ذلك عبر مثال نلطف فيه جوّ التجريد .

**مثال(1) :** استخدم متسلسلة تيلر لحل المعادلة التفاضلية :

$$y' = 1 + y^2 \quad , y(0) = 1$$

جد فقط أول ستة حدود من المتسلسلة .

**الحـــل :** هنا $x_0 = 0$ ، حيث أخذنا ذلك من الشرط الأولي .

ولنفرض أن $y$ له تمثيل بمتسلسلة تيلر حول $x = 0$ . وعليه

$$y = \sum_0^\infty \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= y(0) + y'(0)x + y''(0)\cdot\frac{x^2}{2} + \cdots\cdots$$

وعليه نعرف $y$ اذا عرفنا $y(0)$ , $y'(0)$ , $y''(0)$ , ...... .

ولكن $y(0) = 1$ وكذلك $y' = 1 + y^2$ . ومنه $y'(0) = 1 + y^2(0) = 2$ . وأيضاً $y'' = 2y'\cdot y$ ومنه $y''(0) = 2y'(0)\,y(0) = 4$ . وهكـذا يمكننـا أن نحصـل علـى $y^{(n)}(x_0)$ لكل $n$ .

وإذا حسبنا $y^{(n)}(0)$ حتى $n = 5$ مثلاً نحصل على ستة حدود من متسلسلة الحل :

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \frac{10x^4}{3} + \frac{64x^5}{15} + \cdots\cdots$$

**مثال(2) :** جد أول ثلاثة حدود ( غير صفرية ) من متسلسلة تيلر لحل المعادلة :

$$y'' + \sin y = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

**الحـــل :** مرة أخرى ، الحل حول $x = 0$ . وعليه يكون شكل الحل :

$$y(x) = y(0) + y'(0)\,x + y''(0)\,\frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots$$

وكل ما علينا عمله هو محاولة إيجاد $y^{(n)}(0)$ . ولكن معطى لنا $y(0)$ و $y'(0)$ .

إذن علينا إيجاد $y^{(n)}(x_0)$ لكل $n \geq 2$ .

ولكن $y''(x) = -\sin y$ وعليه $y''(0) = -\sin(y(0))$ ومنه $y''(0) = -\sin 1$ .

والآن :

$$y'''(x) = -\cos y \cdot y'$$

وعليه

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -\cos(y(0)) \cdot y'(0) \\ &= (\cos 1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

حتى الآن لدينا حدّان غير صفريان ولا بد من إيجاد حد ثالث .

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= -\frac{d}{dx}\left[\cos y \cdot y'\right] \\ &= -\left[-(\sin y)\, y' \cdot y' + \cos y \cdot y''\right] \\ &= y'^2 \sin y - y'' \cos y \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} y^{(4)}(0) &= 0 \cdot \sin y(0) - y''(0) \cos y(0) \\ &= + \sin 1 \cdot \cos 1 \end{aligned}$$

إذن أول ثلاثة حدود غير صفرية :

$$\begin{aligned} & y(0) + y''(0)\,\frac{x^2}{2!} + y^{(4)}(0)\,\frac{x^4}{4!} \\ &= 1 - (\sin 1)\,\frac{x^2}{2} + (\sin 1 \cdot \cos 1)\,\frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

ونقف عند هذا الحد لنرحل إلى بند آخر .

# مســـائـــل

**الوحدة السابعة**

**بند(2)**

باستخدام متسلسلة تيلر ، جد أول أربعة حدود من متسلسلة حل المعادلات التالية :

(1) $y' = x^2 + y^2$ , $y(-1) = -1$

(2) $y' = 2xy$ , $y(0) = 1$

(3) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ , $y(0) = 1$

(4) $y' = e^x y^2 + 3\sin x$ , $y(0) = 1$

(5) $y'' = -\sin y$ , $y(0) = 1, y'(0) = 0$

(6) $y'' = -4x^2 y - 2\sin x^2$ , $y(0) = 1, y'(0) = 0$

(7) $y'' = y' \ln y + x$ , $y(0) = 1, y'(0) = 2$

## 3- النقاط الطبيعيّة والمتفردة للمعادلات التفاضلية
**( Ordinary and singular points of differential equations )**

عبارة " نريد أن نحل المعادلة التفاضليّة " تعني حتماً حلاً في مجال ما . أي حلاً حول نقطة ما . والنقاط التي يمكن حلّ المعادلة التفاضلية حولها تعتمد في واقعها على عوامل المعادلة التفاضلية . وفي هذا البند سوف نقوم بدراسة تلك النقاط .

والآن : لنفرض أن

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بحيث أن العوامل $p\ ,\ q\ ,\ r$ هي اقترانات تحليلية .

---

**تعريف 3.1 :** (i) تسمى النقطة $x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية ( * ) إذا كان $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ اقترانين تحليلين عند النقطة $x_0$ .

(ii) تسمى النقطة $x_0$ نقطة متفردة للمعادلة التفاضلية ( * ) إذا لم تكن $x_0$ نقطة عادية .

---

وإذا لاحظت( ونحسبك كذلك ) أن النقاط المتفردة هي نقاط المشاكل للمقدارين $\frac{r(x)}{p(x)}$ و $\frac{q(x)}{p(x)}$ .

وحيث أننا نفرض في تعريف 3.1 أن $p$ ، $q$ و $r$ هي اقترانات تحليلية فإن نقاط المشاكل للكسور $\frac{q}{p}$ و $\frac{r}{p}$ هي أصفار المقام . وعليه فإن كل نقطة لا يساوي المقام " $p(x)$ " عندها صفراً هي نقطة عادية . في حين أصفار $p(x)$ هي النقاط التي يغلب على الظن أن تكون النقاط المتفردة للمعادلة .

ونقول هنا " يغلب على الظن " إذ قد يكون p يساوي صفراً عند نقطة ما $x_0$ مثلاً ولكن في الوقت ذاته يكون $q(x_0)$ و $r(x_0)$ كليهما صفراً . إذ في هذه الحالة قد يعادل صفر البسط صفر المقام وتلغى المشكلة . وسنبين ذلك في الأمثلة .

**مثال(1)** : عين النقاط المتفردة والعادية للمعادلة :

$$x^2(x-1)\ y'' + e^x y' + y = 0$$

**الحل** : هنا

$$p(x) = x^2(x-1)\ ,\ q(x) = e^x\ ,\ r(x) = 1$$

وأصفار $p(x)$ هي $x = 1\ ,\ x = 0$ وهي نقاط المشاكل للمعادلة .

والآن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{q(x)}{p(x)}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{q(x)}{p(x)}$ غير موجودان . وكذلك الأمر بالنسبة ل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{r(x)}{p(x)}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r(x)}{p(x)}$ .

وعليه $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ و $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ ليسا تحليليين عند $x = 1\ ,\ x = 0$ .

إذن النقاط $x = 1\ ,\ x = 0$ هي نقاط متفردة . وأما ما دون ذلك فهي نقاط عادية . أي أن النقاط العادية هي $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

**مثال(2)** : عين النقاط المتفردة والعادية للمعادلة :

$$x\ y'' + \sin x\ y' + x^2 y = 0$$

**الحل** : $\dfrac{q(x)}{p(x)} = \dfrac{\sin x}{x}$ و $\dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{x^2}{x}$

وعليه فإن نقطة المشاكل الوحيدة هي $x = 0$ . وحيث أن $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ و $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ هي اقترانات تحليلية عند كل النقاط في $\mathbb{R}$ ما عدا عند $x = 0$ ، فإن $x = 0$ هي نقطة عادية إذا كان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{q(x)}{p(x)}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r(x)}{p(x)}$ موجودين ومحدودين .

وفي حالتنا : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ , $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$ . وعليه فإن $x = 0$ نقطة عادية .
وبالتالي فإن كل نقاط $\mathbf{R}$ هي نقاط عادية .

ونكتفي بهذين المثالين لنكمل دراستنا لنقاط المشاكل للمعادلة التفاضلية .
وليس كل النقاط المتفردة هي نقاط سوء . بل فيها ما يمكن أن نعالج المعادلة التفاضلية حوله .
وهذا يستدعي التعريف التالي :

**تعريف 3.2** : لنفرض أن $x_0$ هي نقطة متفردة للمعادلة :

$$p\,y'' + q\,y' + r\,y = 0 \quad .$$

نسمي $x_0$ نقطة متفردة نظاميّة إذا كان الاقترانان :

$$(x-x_0)\frac{q(x)}{p(x)} \quad \text{و} \quad (x-x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)}$$

تحليليين .

وفي غير تلك الحالة تسمى $x_0$ نقطة غير منفردة غير نظامية .

ومن الأمثلة على ذلك :

**مثال(3)** : عين النقاط المنفردة النظامية وغير النظامية للمعادلة :

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2x\,y' + y = 0$$

**الحـــل** :

$$\frac{r(x)}{p(x)}=\frac{1}{1-x^2} \quad , \quad \frac{q(x)}{p(x)}=\frac{-2x}{1-x^2}$$

ونقاط المشاكل هي $\{-1,1\}$ . وحيث أن

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{r(x)}{p(x)}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{q(x)}{p(x)}=1$$

وعليه كلا النقطتين نظاميتين .

هل تريد مثالاً صعباً ؟ هو ذاك :

**مثال(4)** : عين النقاط المتفردة النظامية وغير النظامية للمعادلة :

$$x\cos x\ y'' + 3y' + \frac{2}{x^2(x-4)^2}\ y = 0$$

**الحـــل :**

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{2}{x^3(x-4)^2\cos x} \quad , \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{3}{x\cos x}$$

وعليه تكون نقاط المشاكل هي $\{0,4\} \cup \left\{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ .

أما $x = 0$ فإنها غير نظامية وذلك لأن

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)}$ غير موجودة . وعليه $x^2 \frac{r(x)}{p(x)}$ ليس تحليلياً عند $x = 0$ .

أما $x = 4$ فهي نظاميّة وذلك لأن

$$\lim_{x \to 4} (x-4)^2 \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{2}{16\cos 4} \quad , \quad \lim_{x \to 4} (x-4)\frac{q(x)}{p(x)} = 0$$

أما عند النقاط $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ فلعلك قادر بنفسك أن تجد :

$$\lim_{x \to (2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad , \quad \lim_{x \to (2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{q(x)}{p(x)}$$

وستحتاج لإيجادهما إلى قانون لوبيتال ، وسوف تجد أنهما موجودان . وعليه فجميعها نقاط منفردة نظاميّة .

وفي ختام هذا البند نخبرك بما يلي :-

نستطيع أن نحل المعادلة التفاضلية حول النقاط العادية والنقاط المنفردة النظامية . ولا نستطيع فعل ذلك حول النقطة غير النظامية .

فإلى التفصيل ندعوك .

# مـســــائـــل

**الوحدة السابعة**

**بند(3)**

حدد النقاط المتفردة لكل من المعادلات التالية :

$$(1)\quad (1-x)\,y'' + \frac{3x}{x+2}y' + \frac{(1-x)^2}{x+3}y = 0$$

$$(2)\quad (x^2+x)\,y'' + \frac{x^3}{x-1}y' + \frac{x^4+3x}{x+2}y = 0$$

$$(3)\quad \frac{1}{x}\,y'' + \frac{3(x-4)}{x+6}y' + \frac{x^2(x-2)}{x-1}y = 0$$

$$(4)\quad (x^2+3x+2)\,y'' + \frac{x+2}{x-1}y' + \frac{x-2}{x}y = 0$$

$$(5)\quad (x^2+9)\,y'' + \frac{x-2}{x+7}y' + \frac{x^2+3}{2}\,y = 0$$

$$(6)\quad e^{x}\,y'' + \frac{3x-4}{x+4}y' + \frac{x}{x-4}y = 0$$

حدد النقاط المتفردة النظامية وغير النظامية لكل من المعادلات التالية :

$$(7)\quad x^2(x^2-1)^2\,y'' + \frac{x(x+1)}{x-4}\,y' + \frac{3(x-1)}{x^2-16}\,y = 0$$

$$(8)\quad x(x^2-3x-10)\,y'' + \frac{x+4}{x-2}y' + 16y = 0$$

$$(9)\quad x\sin x\;y'' + \frac{3(x-1)}{x+1}y' + (\cos x)\,y = 0$$

$$(10)\quad (\sin x)\,y'' + \frac{x\cos x}{x+1}y' - \frac{x^2}{x-2}\,y = 0$$

$$(11)\quad x^2(x^2-6)\,y'' + \frac{x-2}{x+2}y' + 32\,y = 0$$

$$(12)\quad 4x(\sin x)\,y'' - 3y = 0$$

## 4- الحـل حـول النـقـاط العـاديـة ( Solution Around Ordinary Points )

قبل أن نناقش عملية إيجاد الحل ، لا بد من أن نطمئن أولاً إلى وجوده . والنظرية التاليـة تؤكد لنا وجود الحل حول النقطة العادية .

**نظرية 4.1 :** إذا كانت $x = x_0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية :

$$py'' + qy' + ry = 0$$

فإن المعادلة لها حل $y = y(x)$ تحليلي عند $x = x_0$ . وإذا كان منشور متسلسلة $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ موجوداً ومتقارباً في الفترة $|x - x_0| < s$ فإن الحل $y(x)$ له منشور متسلسلة موجود ومتقارب في نفس الفترة .

ولا نريد أن نرهقك ببرهان هذه النظرية فكل ذلك ضمن مادة متقدمة في نظرية المعادلات التفاضلية .

أما كيف نجد الحل فإليك ملخص الطريقة :

(i) نفرض أن الحل له منشور متسلسلة بالشكل $y(x) = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n$ ، حيث $a_n$ عوامل لا بد من تعيينها .

(ii) نعوض هذه المتسلسلة في المعادلة المعطاة لنحصل على :

$$p(x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2} + q(x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} + r(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0 \quad \cdots(1)$$

(iii) حيث أن $q$ , $p$ و $r$ هي اقترانات تحليلية عند $x = x_0$ ، فـإن لهـا منشـور متسلسلة عند $x = x_0$ . نكتبها ، ونقوم بضرب المتسلسلات في المعادلة (1) .

(iv) نقوم بتجميع معاملات الأسس المتشابهة لنحصل على :

$$b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots = 0$$

حيث $b_0$ , $b_1$ , $b_2$ ,...... تحوي على المعاملات $a_n$ .

(v) نقوم بوضع $b_n = 0$ لكل $n$ .

المعادلة $b_n = 0$ تسمى **بالعلاقات المعاودة** ، ومنها نجد معاملاتنا $a_n$ .

ما بالك صامت لا تنبس ببنت شفة ؟

إن كان هذا الملخص فما بال التفصيل ! أليس هذا لسان حالك ؟

لا بد من إعادتك لأرض الواقع والحقيقة . فالوضع أيسر وأسهل مما تتصور . والأمثلة التالية خير دليل .

**مثال(1)** : استخدم المتسلسلات لتحل المعادلة $y'' + y = 0$ حول النقطة $x = 0$ .

**الحـــل** : النقطة $x = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة ( بل إن كل نقطة في $\mathbf{R}$ هي نقطة عادية ) . وحسب نظرية 4.1 فإنه يمكن لنا أن نكتب الحل بالشكل $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ .

ومنه

$$y' = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} \ .$$

نعوض في المعادلة لنحصل على :

$$\sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$

وحتى نستطيع دمج المتسلسلة لا بد من توحيد شكل الأسس في المتسلسلتين . فإما أن تكون الأسس في كليهما $n$ أو في كليهما $n - 2$ . والطالب ( كما هو الحال معنا أيضاً ) اعتاد على التعامل مع $n$ بدلاً من $n - 2$ . وعليه نقوم بالتغيير التالي في المتسلسلة $\sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$

ضع $n - 2 = m$ . إذن $n = m + 2$ وكذلك $n - 1 = m + 1$ . ونستخلص أيضاً أنه عندما يكون $n = 2$ يكون $m = 0$ . فتصبح المتسلسلة :

$$\sum_{n=2}^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^\infty (m+2)(m+1)\, a_{m+2}\, x^m$$

وهذا الأمر يذكرنا بتغيير المتغيرات في التكاملات المحدودة وتغيير ما يلزم في حدود التكامل .

ولكن في المتسلسلة $\sum_{m=0}^\infty (m+2)(m+1)\, a_{m+2}\, x^{m+2}$ يمكن استبدال $m$ بأي متغير آخر. ولذا يمكن إعادة $n$ بدلاً من $m$ . فتصبح معادلتنا :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{0}^{\infty}a_n x^n=0$$

إذن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0$$

فتكون $b_n$ في هذه الحالة هي $(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n$ .

وتكون بذلك العلاقات المعاودة :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0$$

ومنه

$$a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

حيث : $n=0, 1, 2, \ldots$ .

وكما تلاحظ نستطيع أن نحصل على :

$$n=0 \quad : \quad a_2=-\frac{1}{2}a_0$$

$$n=1 \quad : \quad a_3=\frac{1}{6}a_1$$

$$n=2 \quad : \quad a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{a_0}{4!}$$

$$n=3 \quad : \quad a_5=-\frac{a_3}{5\cdot 4}=\frac{a_1}{5!}$$

وهكذا لكل n . وهنا يأتي دور معلوماتك من الحسبان وسرعة بديهتك لترى أن :

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{(2n)!} \quad , \quad a_{2n+1}=(-1)^n\frac{a_1}{(2n+1)!}$$

لكل : $n=1, 2, 3, \ldots$ .

وعليه

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=\sum_{\text{even}}a_n x^n+\sum_{\text{odds}}a_n x^n$$

$$=\left(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots\right)+\left(a_1x+a_3x^3+\cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_0\, x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_1\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

الا ترى أن هذا هو الحل العام .

والآن نُسّرّ إليك بشيء فلا تغضب :

" لقد كان المثال من أبسط الأمثلة في هذا الموضوع " .

والآن إلى مثال أصعب .

**مثال(2)** : جد الحل العام للمعادلة $y''+xy'+y=0$ .

**الحـــل** : طبعاً يمكن حل هذه المعادلة بأكثر من طريق .

ولكن الذي يهمنا هو طريق المتسلسلات . ونظرية 4.1 تضمن لنا وجود حل تحليلي على $\mathbf{R}$.

إذن يمكن فرض أن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . ومنـه :

$y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ و $y''(x) = \sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ . وبـالتعويض فـي المعادلـة نحصل على :

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

نقوم الآن بعملية توحيد الأسس فنجعلها كلها بدلالة $n$ . وبالتالي نعالج فقط

$\sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ . والطريق كما تعرف : نضع $m = n - 2$ . ومنه $n = m + 2$ .

وأيضاً نرى أن $m = 0$ إذا كان $n = 2$ . كلّ هذا يعطينا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, a_{m+2}\, x^m$$

ومرة أخرى فإن $m$ هو متغير شكلي . وبالتالي

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, a_{m+2}\, x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n$$

وبالتالي تصبح المعادلة لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

وحتى نستطيع أن نضع المتسلسلات في متسلسلة واحدة لا بد أن تكون بداية المتسلسلات واحدة ، وهي ليست كذلك في حالتنا . ولعمل ذلك نتعرف على المتسلسلة ذات البداية المتأخرة ونوحد كل شيء معها . وفي حالتنا المتسلسلة ذات البداية المتأخرة هي $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ . ولذلك نقوم بفصل الحدود الزائدة في المتسلسلات الأخرى كما يلي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2\cdot 1\cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

وعليه تصبح المعادلة :

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right]x^n = 0$$

وهذا يعطينا :

$$2a_2 + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots(1)$$

وكذلك لكل $n \geq 1$ :

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_n = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

وعليه :

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad , n \geq 1$$

ومن هذه نستنتج :

$$a_3 = -\frac{a_1}{3} \quad , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5} \quad , \cdots\cdots$$

ونلاحظ هنا أن المعاملات $a_n$ كلها نجدها بدلالة $a_1 , a_0$ وهذه العوامل هي :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2\cdot 4 \cdots\cdots 2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3\cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

ومنه

$$. \quad y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3\cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

حيث $a_1 , a_0$ هي ثوابت اختيارية .

وهذا هو الحل العام المطلوب .

ولا نريد أن نثير فزعك ، ولكن نريد أن تستمر في رحلتنا عبر أعماق بحار المعادلات .
ولذلك نود أن ننطلق بك إلى بند جديد . قد يكون أصعب بقليل ( أو بكثير ) من البند الحالي .

---

# مســـائـــل

**الوحدة السابعة**

**بند(4)**

جد متسلسلة الحل العام للمعادلات التالية حول النقطة $x_0 = 0$ .

(1) $y' - 2xy = 0$

(2) $y'' + y = 0$

(3) $y'' - xy' + 4y = 0$

(4) $y'' - xy = 0$

(5) $y'' - x^2y' - xy = 0$

(6) $(x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$

(7) $(x^2 + 1)y'' - 4xy' + 6y = 0$

(8) $y'' - y = 0$

(9) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$

(10) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(11) $y'' - 3xy = 0$

(12) $y''' - 3xy' - y = 0$

## 5- معادلة الدلالة عند النقطة المتفردة النظامية .
## ( Indicial equation at singular regular point )

مرة أخرى نذكرك بأن $x = x_0$ تسمى نقطة متفردة نظامية للمعادلة :

$$p y'' + q y' + r y = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)} \quad و \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)}$$

موجودين .

وهذا يعني أنه يمكن أن نكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$(x - x_0)\, y'' + (x - x_0)\hat{P}(x)\, y' + \hat{Q}(x)\, y = 0$$

حيث $\hat{P}$ , $\hat{Q}$ تحليليان عند $x = x_0$ .

ومن أشهر الأمثلة على ذلك هي معادلة أُيلر التي مرت بك في هذا الكتاب :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0$$

والسؤال الآن : هل يوجد حل للمعادلة التفاضلية (1) حول نقطة متفردة نظامية ؟
وللإجابة على هذا السؤال نحتاج التعريف التالي :

> **تعريف 5.1** : إذا كانت $x = x_0$ نقطة متفردة نظامية للمعادلة (1) ، فإن معادلة الدلالة للمعادلة (1) هي المعادلة :
>
> $$s(s - 1) + p_0 s + q_0 = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$
>
> حيث
>
> $$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)} \quad و \quad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)}$$
>
> وحلول معادلة الدلالة تسمى دلائل النقطة $x_0$ .

وسوف نمد لك يد العون بمثال يوضح التعريف .

**مثال(1)** : جد معادلة الدلالة للمعادلة : $2xy'' + 6y' - 9xy = 0$ عند $x = 0$ .

**الحـــل** : هنا

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{6}{2x} \quad و \quad \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{-9x}{2x}$$

وعليه

$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{-9x}{2x} = 0$ و $p_0 = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{6}{2x} = 3$ .

إذن معادلة الدلالة هي :

$$s(s-1) + 3s + 0 = 0$$

ومنه $s^2 + 2s = 0$

وعليه حلول هذه المعادلة هي $s = 0$ , $s = -2$ .

**مثال(2) :** جد معادلة الدلالة للمعادلة $x^2 y'' - 2x(x+1)\, y' + (x-1)\, y = 0$ عند النقطة $x = 0$ .

**الحـــل :** مرة أخرى : $\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{-2x(x+1)}{x^2}$ و $\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{x-1}{x^2}$

وعليه $p_0 = \lim_{x\to 0} x \frac{q(x)}{p(x)} = -2$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)} = -1$

إذن معادلة الدلالة هي $s(s-1) - 2s - 1 = 0$ .

وبذلك تكون دلائل النقطة $x = 0$ هي جذور المعادلة :

$s^2 - 3s - 1 = 0$ . أي $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

وفكرة معادلة الدلالة آتية من معادلة أيلر .

فإذا كانت معادلة أيلر مثلا هي :

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$

فإننا نحلها بطريق تحويلها إلى معادلة ذات عوامل ثابتة بالتعويض : $u = \ln x$ . وتكون الحدودية المرتبطة بالمعادلة الجديدة هي :

$$s(s-1) + as + b \quad \cdots\cdots (*)$$

ولكن ألا ترى بأن $a = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{q(x)}{p(x)}$ وأن $b = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)}$ ؟ .

وهذه الملاحظة تعزى إلى العالم فروبينيس ( Fröbenius ) . وشكل حلول المعادلة (I) يعتمد على حلول معادلة الدلالة .

وعملية حل المعادلة التفاضلية (حول نقطة متفردة نظامية ) بملاحظة دلائل النقطة تسمى طريقة فروبينيس ، وهي موضوع البند القادم .

---

## مســـائــل

**الوحدة السابعة**

**بند(5)**

جد معادلة الدلالة للمعادلات التالية حول $x_0 = 0$ .

(1) $x^2y'' - 2x(x+1)y' + (x-1)\,y = 0$

(2) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

(3) $xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$

(4) $y'' + \left(1 + \dfrac{1}{4x^2}\right)y = 0$

(5) $x(x-2)y'' + 2(x-1)y' + 2y = 0$

(6) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(7) $x^2y'' - 2xy' - 10y = 0$

(8) $4x(\sin x)y'' - 3y = 0$

---

## 6- الحل عند النقطة المتفردة النظامية ( طريقة فروبينيس )

**( Solution a round regular singular point )**

لنفرض أن :

$$py''+qy'+ry=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

معادلة تفاضلية حيث عوامل $p , q , r$ تحليلية عند $x = x_0$ ، وأن $x = x_0$ هي نقطة منفردة نظامية .

في هذه الحالة لا نتوقع حلاً للمعادلة على فترة تحوي النقطة $x_0$ ، ولكن يمكن حل للمعادلة على يمين $x_0$ وعلى يسار $x_0$. ففي حالة كون $x_0$ هي النقطة المتفردة الوحيدة للمعادلة مثلاً، فإنه يمكن حل المعادلة على الفترتين $(x_0,\infty)$ و $(-\infty,x_0)$ ، وهذه الحالة ظهرت معنا في معادلة أُيلر $x^2y''+axy'+by=0$ حيث $x=0$ نقطة متفردة وحيدة (ونظامية) وكان حل المعادلة صالح على الفترة $(0,\infty)$ وكذلك $(-\infty,0)$ ، (ويمكنك العودة إلى الوحدة الخامسة - البند الخامس للتأكد من ذلك ) .

والآن كيف نجد حلا للمعادلة(1) حول $x = x_0$ ؟ .

نلخص لك الطريقة وهي المعروفة بطريقة فروبينيس لإيجاد حل على فترة من النوع $(x_0 , t)$ وفي هذه الحالة $x - x_0 > 0$ .

**ملخص طريقة فروبينيس**

1. نتأكد أولاً بأن النقطة متفردة نظامية ، وفق القاعدة التي درسناها في البند الثالث من هذه الوحدة .
2. نجد معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند $x = x_0$ ، ثم نجد حلول هذه المعادلة ولتكن $s = s_1$ , $s= s_2$ وهذه الجذور قد تكون حقيقية وقد تكون مركبة . وسوف نعالج حالة الجذور الحقيقية فقط .
3. لنفرض أن $s = s_1$ هو أكبر الجذرين . في هذه الحالة ضع

$$y=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

4. نعوض $y$ في المعادلة (1) فنحصل بعد تجميع عوامل الأسس الواحدة لـ $(x - x_0)$ لنحصل على معادلة من الشكل

$$b_0(x-x_0)^{s_1+k}+b_1(x-x_0)^{s_1+k+1}+\cdots\cdots=0$$

5. نضع : $b_0=0\ ,\ b_1=0\ ,\ b_2=0\ ,\ \cdots\cdots$ .

هذه المعادلات تعطيك العلاقات المعاودة للعوامل $a_n$ . وسوف تلاحظ أن $b_0=0$ ليست سوى معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند $x=x_0$ .

6. بعد أن نجد $a_n$ يكون الحل هو

$$y=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n .$$

والآن ما هي فترة التقارب لهذه المتسلسلة . والجواب في النظرية التالية والتي تؤكد وجود الحل وفترة تقارب متسلسلته .

**نظرية 6.1 : (نظرية فروبينيس ) .**

إذا كانت $x=x_0$ نقطة متفردة نظامية للمعادلة

$$py''+qy'+ry=0\ \cdots\cdots(*)$$

وكانت معادلة الدلالة للمعادلة (*) عند $x=x_0$ لها جذران حقيقيان $s_1\,,s_2$ وكان $s_1>s_2$ فإن $y=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ حل للمعادلة (*) على الفترة $(x_0\,,z)$ حيث $z$ هي المسافة بين $x_0$ وأقرب نقطة متفردة للمعادلة (*) .

فإذا كانت $x_0$ هي النقطة المتفردة الوحيدة للمعادلة (*) فإن $z=\infty$ . أي أن متسلسلة الحل تتقارب على الفترة $(x_0\,,\infty)$ .

والآن دعنا نطبق ذلك على بعض الأمثلة .

**مثال(1) :** جد متسلسلة حل للمعادلة

$$x^2y''-xy'+(1-x)y=0\ \cdots\cdots(2)$$

عند $x=0$ على الفترة $(0\,,\infty)$ .

**الحـــل :** أولاً $x=0$ هي نقطة متفردة نظامية وذلك لأن $p_0=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{q(x)}{p(x)}=-1$

وكذلك $q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\dfrac{r(x)}{p(x)}=1$ .

وهذه الحسابات تعطينا أيضاً معادلة الدلالة للمعادلة (2) عند $x = 0$ ، وهذه المعادلة هي :

$$s(s-1)+p_0 s+q_0=0$$

أي

$$s(s-1)-s+1=0$$

ومنه

$$s^2-2s+1=0$$

أي أن $s_1=s_2=1$ .

ووفق ملخص طريقة فروبينيس فإن

$$y = x\cdot\sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

نعوض في المعادلة لنحصل على

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n+1)x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1)x^n + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

والوضع هنا يذكرنا بطريقة الحل حول النقطة العادية .

فنعمل على توحيد المجاميع ، وذلك بتوحيد الأسس وخلع الزائد لنحصل على :

$$0\cdot a_0 x+\sum\left\{\left[(n+1)(n)-(n+1)+1\right]a_n-a_{n-1}\right\}x^{n+1}=0$$

ومنه

$$\left[(n+1)(n)-(n+1)+1\right]a_n-a_{n-1}=0$$

لكل $n\geq 1$ . ومن هذا نحصل على :

$$n^2 a_n - a_{n-1}=0$$

أي أن العلاقات المعاودة هي :

$$a_n=\frac{1}{n^2}a_{n-1} \qquad , \quad n\geq 1$$

وعليه :

$$a_1=a_0$$

$$a_2=\frac{1}{4}a_1=\frac{1}{4}a_0$$

$$a_3=\frac{1}{9}a_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot a_0$$

$$=\frac{1}{(2\cdot 3)^2}a_0$$

وعموماً نجد أن

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} a_0$$

وعليه فإن المعادلة (2) لها حل من الشكل :

$$y = a_0 x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^n \qquad , \quad x > 0$$

هل تريد مثالا آخر ؟

إنا إلى ذلك ذاهبون .

**مثال(2) :** جد متسلسلة حلّ للمعادلة

$$x^2 y'' + (3x + x^2) y' + (1 + x^2) y = 0 \cdots\cdots (3)$$

عند النقطة $x = 0$ .

**الحـــل :** النقطة هي نقطة متفردة نظاميّة . وباالتالي يمكننا استخدام طريقة فروبينيس لنجد حلاً للمعادلة (3) على الفترة $(0 , \infty)$ .

وحتى نجد معادلة الدلالة نقوم بحساب :

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{1 + x^2}{x^2} = 1 \qquad , \quad p_0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{3x + x^2}{x^2} = 3$$

ومنه فإن معادلة الدلالة هي :

$$s(s - 1) + 3s + 1 = 0$$

أي :

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

وتكون دلائل النقطة $x = 0$ (جذور معادلة الدلالة ) هي $s_1 = s_2 = -1$ . وعليه فإنه يمكننا كتابة حل للمعادلة (3) على الفترة $(0 , \infty)$ بالشكل :

$$y = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

نعوض هذا في المعادلة (3) لنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3(k-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)a_n x^n$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1}=0$$

نقوم بتوحيد الأسس وخلع الزائد من المجاميع لنحصل على :

$$a_1-a_0+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n^2 a_n+(n-2)a_{n-1}+a_{n-2}\right]x^{n-1}=0$$

ومنه

$$a_1-a_0=0 \;\cdots\cdots(i)$$
$$n^2 a_n+(n-2)a_{n-1}+a_{n-2}=0 \quad , \quad n\geq 2 \;\cdots\cdots(ii)$$

المعادلات (ii) هي العلاقات المعاودة للمعادلة (3) . ومن (i) و (ii) نحصل على :

$$a_1=a_0$$
$$a_k=\frac{-(n-2)a_{n-1}-a_{n-2}}{n^2} \quad , \quad n\geq 2$$

بالتعويض في n نحصل على :

$$a_2=\frac{-a_0}{4}$$
$$a_3=\frac{-a_2-a_1}{9}=\frac{-a_0}{12}$$
$$a_4=\frac{-2a_3-a_2}{16}=\frac{5}{12\cdot 16}a_0$$

وهكذا . وعليه يكون شكل الحل هو :

$$y=\frac{a_0}{x}\left[1+x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}-\frac{5x^4}{192}+\cdots\cdots\right]$$

**مثال(3)** :جد متسلسلة حل للمعادلة :

$$xy''+4y'-xy=0 \;\cdots\cdots(4)$$

حول $x=0$ على الفترة $(0,\infty)$ .

**الحـــل** : النقطة $x=0$ هي متفردة نظامية . ولعلك بلغت سن النضج كي تجد معادلة الدلالة للمعادلة (4) . وإن صدقت في حساباتك تجد أن معادلة الدلالة هي :

$$s(s-1)+4s=0$$

ومنه $s_1=0$ , $s_2=-3$ .

هنا جذران مختلفان والأكبر فيهما $s_1=0$ . وعليه نأخذ $y=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ . وإذا قمت بالتعويض في المعادلة وأتممت عملية توحيد الأسس وخلع الزائد في المجاميع لحصلت على :

$$4a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+4)a_{n+1}-a_{n-1}\right]x^n=0$$

ومنه

$$a_1=0 \qquad \text{(i)}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+4)} \quad , \qquad n\geq 1 \;\cdots\cdots\; \text{(ii)}$$

ومنه

$$a_2=\frac{a_0}{2\cdot 5}$$

$$a_3=\frac{a_1}{3\cdot 6}=0$$

$$a_4=\frac{a_2}{4\cdot 7}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}$$

وهكذا .

ونستطيع من هذه أن نكتب

$$a_{2n+1}=0 \quad , \quad n=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

وأن

$$a_{2n}=\frac{1}{(2\cdot 4\cdots\cdots 2n)(5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+3))}\,a_0$$

$$=\frac{a_0}{2^k\cdot n!\left[5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+3)\right]} \quad , \quad n\geq 1$$

ومن هذا نحصل على :

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\,(n!)\left[5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+3)\right]}\right] \quad , \quad x>0$$

نكتفي بهذا القدر من الأمثلة ، كي نمضي للمعالجة الكاملة لحل المعادلة (I) عند نقطة متفردة نظامية . أي أننا نريد أن نجد الحل العام للمعادلة . وهذا هو موضوع البند القادم .

## مســـــائــل

**الوحدة السابعة**

**بند(6)**

استخدم طريقة فروبينيس لتجد متسلسلة حل للمعادلات التالية حول $x = 0$ ، $x > 0$ .

(1) $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$

(2) $2x(x-1)y'' + 3(x-1)y' - y = 0$

(3) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

(4) $xy'' + y' - 4y = 0$

(5) $x^2y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$

(6) $3xy'' + (2-x)y' - y = 0$

(7) $4x^2y'' + 2x^2y' - (x+3)y = 0$

(8) $x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$

(9) $xy'' - y' - xy = 0$

(10) $3x^2y'' + 8xy' + (x-2)y = 0$

## 7- الحل العام عند النقطة المتفردة النظامية

**( General solution around regular point )**

لنفرض أن :

$$p\,y'' + q\,y' + r\,y = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

معادلة من المرتبة الثانية وعواملها $r, q, p$ تحليلية عند $x = x_0$ . وكانت $x_0$ نقطة متفردة نظامية فإن نظرية 6.1 من البند السابق تضمن لنا وجود حل من الشكل :

$$y = (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث $s_1$ هو أكبر جذور معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند النقطة $x_0$ .

وكمعادلة خطية من المرتبة الثانية فإننا نتوقع وجود حلين مستقلين للمعادلة (1) ويكون الحل العام هو المسح الخطي لهذين الحلين . والبند السادس عرض لنا طريق إيجاد أحد هذين الحلين . والآن كيف نجد حلاً آخر للمعادلة (1) .

طبعاً حسب نظرية 5.2 من الوحدة الثالثة هناك قانون لإيجاد $y_2$ إذا عرفنا $y_1$ . هل تذكر ذلك ؟ هل تذكر القانون

$$y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)}\,dx \quad ؟$$

هذا القانون صعب التطبيق في حالتنا حيث $y_1$ هي متسلسلة وعليه لا بد من تربيعها وإيجاد المعكوس لذلك $\left(\frac{1}{y_1^2}\right)$ .

وهذا ليس بالأمر السهل . إذن لا بد من البحث عن طريق آخر .

ولكن ماذا لو وضعنا الحل الثاني بالشكل :

$y = (x - x_0)^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ، حيث $s_2$ هو الجذر الثاني لمعادلة الدلالة ؟ ترى هل نحصل على حل مستقل عن الحل $y = (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ، $(s_1 > s_2)$ ؟

ليس الأمر بصحيح لو كان $s_1 = s_2$ أو كان $s_1 - s_2$ عدد صحيح . إذن ما الحل ؟
الجواب في النظرية التالية :

**نظرية 7.1** : لنفرض أن $x = x_0$ نقطة متفردة نظامية للمعادلة (1) وأن $s_1$ , $s_2$ هما جذرا معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند $x_0$ ، حيث $s_1 \geq s_2$ .

(i) إذا كان $s_1 - s_2$ فإن المعادلة(1) لها حلان مستقلان من الشكل :

$$y_1 = (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad ، \quad y_2 = (x - x_0)^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث $a_0 \neq 0$ , $b_0 \neq 0$ , $x \in (x_0, z)$ .

(ii) إذا كان $s_1 = s_2$ فإن المعادلة(1) لها حلان مستقلان من الشكل :

$$y_1 = (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad ،$$

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \ .$$

حيث $a_0 \neq 0$ , $x \in (x_0, z)$ .

(iii) إذا كان $s_1 - s_2$ عدد صحيح أكبر من الصفر فإن هناك حلاّن مستقلان للمعادلة(1) من الشكل :

$$y_1 = (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad ،$$

$$y_2 = c y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

حيث $a_0 \neq 0$ , $b_0 \neq 0$ , $x \in (x_0, z)$ و $c$ ثابت يمكن أن يساوي الصفر.

ونلاحظ هنا أن طريقة فروبينيس ( البند السادس ) دائماً تعطينا $y_1$ . وكذلك فإنها تعطينا $y_2$ إذا كان $s_1 - s_2$ ليس عدداً صحيحاً . أما كيف نجد العوامل $b_n$ في الحالة (ii) والحالة(iii) فإننا نستعمل طريقة العوامل غير المعينة . ولا نقول بأن هذه سهلة لكنها تفي بالغرض . ولنأخذ أمثلة على ذلك .

**مثال(1)** : جد مجموعة من حدود متسلسلة كل من الحلين المستقلين للمعادلة

$xy''-xy'+(1-x)y=0$ حول $x_0=0$ في الفترة $x>0$

**الحـــل** : هذه المعادلة هي نفس معادلة مثال(1) من البند السادس . وهناك أوجدنا :

$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^{n+1}$ ، وكذلك جذور معادلة الدلالة كانت $s_1 = s_2=1$ ، وهذه حالة (ii) من نظرية 7.1 . وعليه يكون شكل $y_2$ هو : $y_2=y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ والمطلوب الآن هو إيجاد العوامل $b_n$ .

نحسب $y_2', y_2''$ لنجد :

$$y_2'=y_1'\ln x+\frac{y_1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^n$$

$$y_2''=y_1''\ln x-\frac{y_1}{x^2}+\frac{2y_1'}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)b_n x^{n-1}$$

نعوض الآن في المعادلة لنحصل على :

$$\left[x^2y_1''-xy_1'+(1-x)y_1\right]\ln x-2y_1+2xy_1'$$
$$+\sum_1^{\infty}n(n+1)b_n x^{n+1}-\sum_1^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1}+\sum_1^{\infty}b_n x^{n+1}-\sum_1^{\infty}b_n x^{n+2}=0$$

وحيث أن $y_1$ هو حل للمعادلة فإن معامل $\ln x$ يساوي صفراً . ومنه نحصل على :

$$2xy_1'-2y_1+\sum_1^{\infty}n(n+1)b_n x^{n+1}-\sum_1^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1}+\sum_1^{\infty}b_n x^{n+1}-\sum_1^{\infty}b_n x^{n+2}=0$$

وحيث أن $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^{n+1}$ وبالتعويض وتجميع الحدود في المعادلة (*) نحصل :

$$(2+b_1)x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2n}{(n!)^2}+n^2b_n-b_{n-1}\right]x^{n+1}=0$$

ومنه

$$2+b_1=0 \qquad (i)$$

$$2\le n\ ,\ \frac{2n}{(n!)^2}+n^2b_n-b_{n-1}=0 \qquad (ii)$$

ومنه $b_1=-2$ ، وكذلك

$$b_n=\frac{1}{n^2}\left[b_{n-1}-\frac{2n}{(n!)^2}\right]\ ,\ n\ge 2$$

وبالتعويض لقيم n نحصل على :

$b_2 = \frac{-3}{4}$ , $b_3 = \frac{-11}{108}$ وعليه :

$$y_2 = y_1 \ln x - 2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + \cdots\cdots$$

**مثال(2)** : جد بعض الحدود الأولى لمتسلسلة الحلين المستقلين للمعادلة :

$xy'' + 4y' - xy = 0$ عند $x = 0$ لقيم $x > 0$ .

**الحـــل** :معادلتنا هي معادلة مثال (3) من البند السادس . وهناك أوجدنا معادلة الدلالة عند النقطة المتفردة النظامية $x = 0$ ووجدنا أن جذور معادلة الدلالة هما $s_1 = 0$ , $s_2 = -3$ .

وباستخدام الجذر الأكبر $s_1 = 0$ وطريقة فروبينيس وجدنا أن

$$y_1 = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!\left[5 \cdot 7 \cdots (2n+3)\right]}\right] \quad , \quad x > 0 \ .$$

وإذا أخذنا $a_0 = 1$ نجد أن

$$y_1 = 1 + \frac{x^2}{10} + \frac{1}{280}x^4 + \cdots\cdots$$

وحيث أن $s_1 - s_2$ عدد صحيح موجب فإنه وفق نظرية 7.1 الحالة (iii) يكون الحل الثاني لمعادلتنا بالشكل :

$$y_2 = c y_1 \ln x + x^{-3}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإذا عوضنا $y_2$ في المعادلة نحصل على :

$$[xy'' + 4y_1' - xy_1]c\ln x + 3c\,\frac{y_1}{x} + 2cy_1'$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)b_n x^{n-4} + \sum_{n=0}^{\infty}4(n-3)\,b_n x^{n-4} - \sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n-2} = 0$$

وحيث أن $y_1$ حل للمعادلة فإن معامل lnx يساوي صفراً .

ولذلك بعد توحيد المجاميع والتبسيط نحصل على :

$$3c\,\frac{y_1}{x} + 2cy_1' - 2b_1\frac{1}{x^3} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-3)\,b_n - b_{n-2}\right]x^{n-4} = 0$$

وبالتعويض عن $y_1 , y_1'$ ونشرنا المتسلسلة نحصل على :

$$-\frac{2b_1}{x^3}+(-2b_2-b_0)\frac{1}{x^2}+(3c-b_1)\frac{1}{x}+(4b_4-b_2)$$
$$+\left(\frac{7}{10}c+10b_5-b_3\right)x+(18b_6-b_4)x^2+\cdots\cdots=0$$

ومن ذلك نحصل على العلاقات

$$-2b_1=0\ ,\ -2b_2-b_0=0\ ,\ 3c-b_1=0\ ,$$
$$4b_4-b_2=0\ ,\ \frac{7}{10}c+10b_5-b_3=0\ ,$$
$$18b_6-b_4=0$$

وهذا يعطينا

$$b_1=0\ ,\ b_2=-\frac{1}{2}b_0$$
$$c=\frac{1}{3}b_1=0\ ,\ b_4=-\frac{1}{8}b_0$$
$$b_5=\frac{1}{10}b_3\quad ,\ b_6=-\frac{1}{144}b_0$$

وعليه

$$y_2=b_0\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x}-\frac{1}{144}x^3+\cdots\cdots\right]$$
$$+\ b_3\left[1+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{280}x^4+\cdots\cdots\right]$$

وحتى يكون $y_2$ مستقلاً عن $y_1$ لا بد أن نختار $b_0$ بحيث لا يساوي صفراً إذ أن معامل $b_3$ ليس سوى $y_1$ . وحيث أن $b_0 , b_3$ ثوابت عشوائية نختار $b_0=1 , b_3=0$ وعليه يكون :

$$y_2=b_0\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x}-\frac{1}{144}x^3+\cdots\cdots\right]$$

نكتفي بهذا القدر من الأمثلة .

## مســـائــل

**الوحدة السابعة**

**بند(7)**

جد متسلسلة الحل العام للمعادلات التالية حول $x = 0$ :

(1) $x(x-4)y''+(x-2)y'-4y=0$

(2) $2x^2y''+5xy'-2y=0$

(3) $8x(x+4)y''-8y'+y=0$

(4) $2xy''+3y'-\frac{1}{x-1}y=0$

(5) $3x^2y''-\frac{2x}{x-1}y'+\frac{2}{x-1}y=0$

(6) $3x^2y''+xy'-(1+x)y=0$

(7) $x^2y''+x(x-1)y'+(1-x)y=0$

(8) $xy''+(1-x)y'-y=0$

(9) $x^2y''+3xy'+(x+1)y=0$

(10) $x^2y''+2x^2y'-2y=0$

(11) $xy''-(x+3)y'+2y=0$

(12) $xy''+(2x+3)y'+4y=0$

## 8- معادلات متميزة ( Special equations)

سوف نعرض في هذا البند عدداً من المعادلات المتميزة ، ونذكر حلّها ولكن دون تفصيل ، إذ سنترك لك التأكد مما سنعرضه .

### I- معادلة لجاندر ( Legendre`s equation )

معادلة لجاندر من المرتبة $k$ هي المعادلة :

$$(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1)y=0 \cdots\cdots(1)$$

هذه المعادلة لها نقطتان منفردتان نظاميتان هما $\{-1,1\}$ .

أما ما عدا ذلك فهي نقاط عادية . فالنقطة $x=0$ نقطة عادية . وأشهر الحلول هو الحل عند النقطة $x=0$ والنقطة $x=1$ .

**الحل عند النقطة $x=0$**

نضع $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ثم نعوض ذلك في المعادلة (1) . وبعد التعويض ، وتوحيد الأسس وخلع الزائد ودمج المجاميع نحصل على :

$$2a_2+k(k+1)a_0+[6a_3+(k+2)(k-1)a_1]x+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(k(k+1)-n(n+1)a_n)\right]x^n=0 .$$

ومن هذا نحصل على

$$2a_2+k(k+1)a_0=0$$
$$6a_3+(k+2)(k-1)a_1=0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+((k+n)(k-n)a_n)=0 \quad , \quad n\geq 2 .$$

وذلك يعطينا :

$$y=a_0\left[1-\frac{(k+1)k}{2!}x^2+\frac{(k+3)(k+1)k(k-2)}{4!}x^4+\cdots\cdots\right]+$$
$$a_1\left[x-\frac{(k+2)(k-1)}{3!}x^2+\frac{(k+4)(k+2)(k-1)(k-3)}{5!}x^5-\cdots\cdots\right]$$
$$=a_0y_1+a_1y_2 .$$

وهذه المتسلسلة تمثل لنا الحل على الفترة $(-1, 1)$ حيث أن $x = \pm 1$ هي نقاط منفردة .

والآن ماذا لو كان $k$ عدداً طبيعياً ؟ .

لو كان الأمر كذلك لوجدنا أنه : إما $y_1$ يكون حدودية أو $y_2$ يكون حدودية .

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

**تعريف 8.1 : ( حدوديات لجاندر )**

حدودية لجاندر من الدرجة $k$ هي الحدودية :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$$

وهذه الحدوديات مهمة جداً في الفيزياء والرياضيات التطبيقية . ولها خصائص جداً جميلة نوجز منها :

(1) لكل $k$ عدد طبيعي ، $P_k(x)$ حلٌ لمعادلة لجاندر من الرتبة $k$ .

(2) حدوديات لجاندر تحقق خاصية التعامد :

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_s(x)\, dx = 0$$

لكل $k$ حيث $k \neq s$ .

(3) حدوديات لجاندر $P_k$ لها $k$ من الأصفار المختلفة على الفترة $(-1, 1)$ .

ويمكن حل معادلة لجاندر حول النقطة $x = 1$ لنحصل على واقع مشابه للواقع الناتج عن الحل عند $x = 0$ .

ونترك الآن لجاندر ومعادلته لنتعرف على معادلة أخرى .

## II. معادلة بيسيل ( Bessel`s equation )

معادلة بيسيل من الرتبة $k$ $(k \geq 0)$ هي المعادلة :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - k^2\right) y = 0 \cdots\cdots (2)$$

وهذه المعادلة لها نقطة متفردة نظامية عند $x = 0$ وهي النقطة المنفردة الوحيدة . وبناء على نظرية 6.1 ، فإن متسلسلة حل المعادلة (2) تتقارب على الفترة $(0, \infty)$ .

ومعادلة الدلالة للمعادلة (2) هي :

$$s(s-1)+s-k^2=(s-k)(s+k)=0$$

وجذور هذه المعادلة $s_1=k$ , $s_2=-k$ .

فإذا كان $k \geq 0$ ، فإن المعادلة (2) لها حل من الشكل $y=x^k\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^k$ , $a_0\neq 0$

وذلك وفق نظرية 6.1 . ولو عوضنا ذلك في معادلة بيسيل ( معادلة (2) ) لحصلنا على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+k)(n+k-1)+(n+k)-k^2\right]a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0$$

نوحد المجاميع الآن لنحصل على :

$$(2n+1)a_1 x+\sum_{n=2}^{\infty}n\left[(2k+n)a_n+a_{n-2}\right]x^n=0$$

ومنه

$$a_1=a_3=a_5=\cdots\cdots=a_{2n+1}=0\ ,\quad n\geq 0$$

وكذلك

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}\cdot n!(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}$$

وعليه يكون

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0\,x^{2n+k}}{2^{2n}\cdot n!(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\quad\cdots\cdots(*)$$

هو أحد حليّ معادلة بيسيل .

وإذا كان k عدد صحيح موجب ، واخترنا $a_0=\frac{1}{2^k k!}$ فإن الحل (*) يأخذ الشكل :

$$J_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

وهذا هو اقتران بيسيل من النوع الأول .

أما إذا لم يكن k عدداً صحيحاً فإن اقتران بيسيل يأخذ الشكل :

$$J_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

حيث $\Gamma(k)$ هو اقتران جاما والمعرف بالشكل :

$$\Gamma(k)=\int_0^{\infty}t^{k-1}e^{-t}\,dt \qquad (k>0)$$

وكذلك قمنا باختيار $a_0=\frac{1}{2^k\,\Gamma(k+1)}$ .

طبعاً هناك اقتران بيسيل من النوع الثاني . وكلا الإقترانين قد عولجا بالتفصيل في الكتب التي تتحدث عن الإقترانات المتميزة ( الخاصة) ( **Special function** ) . والذي يود المزيد حول ذلك فإنا نحيله إلى كتاب :

ونود أن نذكر أن هناك مجموعة من المعادلات المشهورة من بينها :

1- معادلة هيرمت من المرتبة $k$ : ( **Hermit Equation** )

$$y''-2xy'+2ky=0$$

وإذا كان $k$ عدداً طبيعياً فإن أحد حلول المعادلة حول النقطة $x=0$ هو حدودية .

2- معادلة تشيبيشيف من الرتبة $k$ : ( **Chebyshev Equation** )

$$(1-x^2)y''-xy'+k^2y=0$$

كذلك لهذه المعادلة حل حدودي حول $x=0$ إذا كان $k$ عدداً طبيعياً .

3- معادلة لَجير من الرتبة $k$ : ( **Laguerre`s Equation** )

$$xy''+(1-x)y'+ky=0$$

ومرة أخري إذا كان $k$ عدداً طبيعياً فإن المعادلة لها حل حدودي .

ويمكنك أن تَسبر غور هذه المعادلات كما فعلنا مع أي معادلة عند نقطة عادية أو متفردة نظامية .

ونكتفي بهذا القدر عن المعادلات وحل المتسلسلة كي نذهب لوحدة جديدة وموضوع جديد .

# الوحدة الثامنة

## منظومة معادلات تفاضلية خطيّة

## " Systems of Linear Differential Equations "

في هذه الوحدة سوف نعالج مسألة حل منظومة معادلات وليس معادلة واحدة فقط . وهذا الموضوع له تطبيقاته وأهميته في الهندسة الكهربائية . وسوف ندرس فقط المنظومات من المرتبة الأولى .

## 1- تعريف المنظومة ( The Definition )

ماذا نعني بمنظومة معادلات تفاضلية خطيّة من المرتبة الأولى ؟ وجود أكثر من معادلة يدل على وجود أكثر من اقتران يعتمد على المتغير $x$ . ولكن لماذا نتحدث لك بهذا الإسلوب العائم . دعنا نعطيك تعريفاً دقيقاً لمعنى المنظومات .

تعريف 1.1 : إذا كانت $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ اقترانات في المتغير $x$ ، فإن منظومة معادلات خطيّة من المرتبة الأولى في هذه الإقترانات ليست سوى مجموعة معادلات من الشكل :

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ اقترانات في $x$ ، والمعاملات $a_{ij}$ قد تكون ثوابت وقد تكون اقترانات في $x$ .

ومن الأمثلة على ذلك :

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + x y_2 + 1 \\ y_2' &= x^2 y_1 - (\sin x)y_2 + e^x \end{aligned}$$

وكذلك :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

والآن هل يمكنك أن تكتب المنظومة بطريقة أفضل وشكل أسهل من الشكل الوارد في التعريف ؟ . الجواب : نعم .

نضع :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

فتصبح المنظومة(1) بالشكل :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

فإذا استخدمنا الرمز $Y'$ ليدل على :

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

فإن المنظومة (1) تصبح :

$$Y' = AY + F \quad \cdots\cdots (2)$$

وهو الشكل الذي يرغب أحدنا في رؤيته واستخدامه .

والآن :

**تعريف 1.2 :** تسمى المنظومة $Y' = AY + F$ منظومة متجانسة إذا كان $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

وإلا فالمنظومة غير متجانسة .

وعليه فالمنظومة :

$$y_1' = 2x y_1 - y_2$$
$$y_2' = y_1 + y_2 + 1$$

هي منظومة غير متجانسة .

ولكن

$$y_1' = y_1 - y_2 \quad , \quad y_2' = y_1 + y_2$$

هي منظومة متجانسة ( وأيضاً ذات عوامل ثابتة ) .

# مســـــائــل

## الوحدة الثامنة

### بند(1)

اكتب المنظومات التالية بطريقة المصفوفات :

(1)
$$y_1' = 3y_1 - y_2 + x^2$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2 + e^2$$

(2)
$$y_1' = 2y_1 + \sin x$$
$$y_2' = y_1 - y_2 + 1$$

(3)
$$y_1' = t^2 y_1 - y_2 - y_3 + x$$
$$y_2' = e^{٢} y_3 + 5$$
$$y_3' = t y_1 - y_2 + 3y_3 - e^{٢}$$

اكتب المنظومات التالية بشكل معادلات خالية من المصفوفات :

(1)
$$Y' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} Y + e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2)
$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Y + e^{x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} Y + e^{٢} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2- الأهمية ووجود الحل لمنظومات الرتبة الأولى

**( Existence of solution )**

تكمن أهمية منظومات المعادلات التفاضلية الخطيّة من المرتبة الأولى في أنه يمكن تحويل أيّ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة $n$ إلى منظومة معادلات خطية من المرتبة الأولى . والنظرية التالية تبين ذلك .

**نظرية 2.1:** إن أي معادلة خطية من المرتبة $n$ من الشكل:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_1y'+a_0y=f \quad \cdots\cdots(1)$$

يمكن تحويلها إلى منظومة معادلات خطية

$$Y'=AY+F$$

حيث $A$ مصفوفة من المرتبة $n$ .

**البرهان :** نعرف الإقترانات التالية على النحو الآتي :

$$y_1=y$$
$$y_2=y'$$
$$\vdots$$
$$y_n=y_n^{(n-1)}$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة(1) بالشكل :

$$y_1'=y_2=0\cdot y_1+1\cdot y_2+0\cdot y_3+\cdots+0\cdot y_n+0$$
$$y_2'=y_3=0\cdot y_1+0\cdot y_2+1\cdot y_3+\cdots+0\cdot y_n+0$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}'=y_n=0\cdot y_1+\cdots\cdots+0\cdot y_{n-1}+1\cdot y_n+0$$
$$y_n'=-a_0y_1-a_1y_2-\cdots\cdots-a_{n-1}y_n+f$$

وعليه تأخذ هذه المنظومة الشكل :

$$Y'=AY+F \quad \cdots\cdots(2)$$

حيث

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & f \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

ولو أنعمت ( وليس أمعنت ) النظر لرأيت أن المعادلة(1) والمنظومة(2) لهما نفس الحل أي نفس قيمة $y$ .

والآن متى يكون للمنظومة $Y' = AY + B$ حل ؟

والجواب :

| |
|---|
| **نظرية 2.2** : إذا كانت $Y' = AY + F$ منظومة معادلات خطية وكانت مداخل ( عناصر ) المصفوفة $A$ متصلة على فترة ما : $I = [a \ , \ b]$ ، فإن هناك حلاً وحيداً للمنظومة على الفترة $I$ ويحقق الشرط الأولي $Y(t_0) = F(t_0)$ حيث : $$Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} \ , \ F(t_0) = \begin{pmatrix} f_1(t_0) \\ \vdots \\ f_n(t_0) \end{pmatrix}$$ |

وهذه النظرية مستمدة من نظريات الوجود والوحدانية المتعلقة بالمعادلة التفاضلية الخطيّة من المرتبة $n$ .

ويجدر الإشارة أن مجموعة حلول المنظومة $Y' = AY + F$ لا تشكل متجهاً فضائياً إلا إذا كان F هو المتجه الصفري . أي أن $f_i(t) = 0$ لكل t في I ولكل i حيث $1 \le i \le n$ .

ونظرية 2.1 تشير من طرف خفيّ أن هناك تشابهاً بين فضاء حلول للمعادلة الخطية من المرتبة n وفضاء الحلول للمنظومة الخطية $Y' = AY$ حيث A من المرتبة n .
وهاك شاهداً على ذلك

| **نظرية 2.3** : إذا كان W هو فضاء الحلول للمنظومة $Y' = AY$ حيث A من المرتبة n ، فإن بُعد W هو n . |
|---|

وبرهان هذه النظرية هو نتيجة سهلة من النظرية التالية :

| **نظرية 2.4** : إذا كان $Y_1, \cdots\cdots, Y_k$ هي حلول للمنظومة $Y' = AY$ وكانت $t_0 \in I$ ، فإن الحلول $Y_1, \cdots\cdots, Y_k$ معتمدة خطياً إذا وإذا فقط $Y_1(t_0), \cdots\cdots, Y_k(t_0)$ معتمدة خطياً في $R^n$ حيث n هي مرتبة المصفوفة A . |
|---|

**البرهان** : لنفرض أن $Y_1, \cdots\cdots, Y_k$ معتمدة خطياً .
إذن هناك ثوابت $c_1, \cdots\cdots, c_k$ ليس جميعها أصفاراً بحيث

$$c_1Y_1 + \cdots\cdots + c_kY_k = 0$$

وهذا يعني أن:

$$c_1Y_1(t) + \cdots\cdots + c_kY_k(t) = 0$$

لكل $t \in I$ . إذن

$$c_1Y_1(t_0) + \cdots\cdots + c_kY_k(t_0) = 0$$

ومنه $Y_k(t_0)$ ,$\cdots\cdots$, $Y_1(t_0)$ معتمدة خطياً في $R^n$ .

والآن : لنفرض أن $Y_k(t_0)$ ,$\cdots\cdots$, $Y_1(t_0)$ معتمدة خطياً .

إذن هناك ثوابت ( ليس جميعها صفراً ) $c_1, \cdots\cdots, c_k$ بحيث :

$$c_1Y_1(t_0) + \cdots\cdots + c_kY_k(t_0) = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

ولكن من الفرض $Y_k$ , ....... , $Y_1$ هي حلول للمنظومة $Y' = A\,Y$ . وعليه

$$Y = c_1 Y_1 + \cdots\cdots + c_k Y_k$$

هو حل أيضاً للمنظومة $Y' = A\,Y$ مع الشرط الأولي $Y(t_0) = 0$ ، وذلك لأن

$$Y(t_0) = c_1 Y_1(t_0) + \cdots\cdots + c_k Y_k(t_0) = 0$$

من المعادلة (*) .

وحيث أن $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ هو أيضاً حل للمنظومة بنفس الشرط الأولي ، فإن نظرية

الوحدانية : نظرية 2.2 ، تقول بأن $Y = Z$. أي أن :

$$Y = c_1 Y_1 + \cdots\cdots + c_k Y_k = 0$$

وهذا يعني أن $Y_k$ ,....... , $Y_1$ معتمدة خطياً .

ولعلك مقتنع بأن هذا ينهي البرهان .

والآن إلى مثال واحد على هذا البند .

**مثال(1)** : حول المعادلة التالية إلى منظومة من المرتبة الأولى :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y = 0$$

**الحل** : كما ورد في برهان نظرية 2.1 ، نضع :

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

ومنه

$$y_1' = y' = y_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2$$

$$y_2' = y'' = -\frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y$$

$$= -\frac{1}{x} y_2 - \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y_1$$

ومنه

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1-\frac{4}{x^2}\right) & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

وتكون المنظومة $Y' = A\,Y$ .

---

# مســـــائــــل

**الوحدة الثامنة**

**بند(2)**

حول المعادلات التالية إلى منظومة معادلات من الرتبة الأولى :

(1) $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)y = 0$

(2) $y''' + (\cos x)y'' + e^x y = x^2 + 1$

(3) $y^{(4)} + e^x y'' = \cos x$

(4) $y'' + y = x^2$

(5) $y'' - 3y' - 10y = \sin x$

(6) $y''' - y' + y = \cos x$

(7) $y^{(4)} + y = x^2$

---

## 3- حل منظومات المرتبة الأولى ذات العوامل الثابتة

**( Solution of first order systems with constant cofficients )**

في هذا البند والبنود التي تليه سوف نعالج مسألة حل المنظومة $Y' = AY + F$ حيث مدخولات المصفوفة $A$ ثوابت .

وهناك عدة طرق لحل المنظومات الخطية . ولكننا سوف نعرض طريقتين هما :

(1) طريقة تحويل لابلاس .

(2) طريقة القيم الذاتية للمصفوفة $A$ .

وفي هذا البند سوف نناقش الطريقة الأولى . وهذه الطريقة يسهل التعامل بها في حالة كون مرتبة $A$ منخفضة كأن تكون 2 أو 3 . والآن إلى نقاش تلك الطريقة .

### طريقة تحويل لابلاس

لنفرض أن المنظومة هي $Y' = AY + F$ مع الشرط الأولي

$$Y'(0) = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix}$$

وملخص الطريق :

(1) نكتب المنظومة بالشكل العادي وليس بشكل المصفوفات

$$y_1' = a_{11}y_1 + \cdots\cdots + a_{1n}y_n + f_1$$
$$\vdots$$
$$y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots\cdots + a_{nn}y_n + f_n$$

(2) نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من هذه المعادلات فنحصل على :

$$s\,\hat{y}_1'(s) - y_1(0) = a_{11}\hat{y}_1(s) + \cdots\cdots + a_{1n}\hat{y}_n(s) + \hat{f}_1$$
$$\vdots$$
$$s\,\hat{y}_n'(s) - y_n(0) = a_{n1}\hat{y}_1(s) + \cdots\cdots + a_{nn}\hat{y}_n(s) + \hat{f}_n$$

(3) نستخدم الشرط الأولي فنجد منه $y_1(0) = b_1 , \cdots\cdots , y_n(0) = b_n$ .

(4) يتكون لدينا في النهاية منظومة معادلات ( ليس تفاضلية ) خطية : $n$ من المعادلات في $n$ من المجاهيل ( $\hat{y}_i(s)$ ) .

(5) نحل هذه المعادلات بالطرق العادية ونجد قيم $\hat{y}_n(s)$ , ....... , $\hat{y}_1'(s)$ بدلالة $s$ .

(6) نأخذ نظير لابلاس لهذه الاقترانات لنجد من ذلك $y_1 , \cdots\cdots , y_n$ .

ولنأخذ أمثلة على ذلك .

**مثال(1)** : حل المنظومة $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ , $Y' = AY$ حيث $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ .

**الحـــــل** : المنظومة هي :

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2 \ ,$$
$$y_2' = 3y_2 - 2y_1 \ ,$$

مع الشروط : $y_2(0)=1 \ , \ y_1(0)=1$ .

نؤثر بتحويل لابلاس على طرفي المعادلات لنحصل على :

$$s\,\hat{y}_1'(s) - y_1(0) = 3\hat{y}_1(s) - 2\hat{y}_2(s)$$
$$s\,\hat{y}_2'(s) - y_2(0) = 3\hat{y}_2(s) - 2\,\hat{y}_2(s)$$

نستخدم الشروط الأولية وننقل كل شيء لطرف واحد فنحصل على :

$$(s+3)\,\hat{y}_1'(s) + 2\,\hat{y}_2(0) = 1$$
$$2\,\hat{y}_2'(s) + (s-3)\,\hat{y}_2(0) = 1$$

وهاتان معادلتان بمجهولين $\hat{y}_2$ , $\hat{y}_1$ . نحلها بالطرق العادية لنحصل على :

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{s-1} \quad , \ \hat{y}_2 = \frac{1}{s-1}$$

نأخذ نظير لابلاس لنصل في النهاية إلى :

$$y_1 = e^x \ , \ y_2 = e^x$$

ويكون $Y=\begin{pmatrix}e^x\\ e^x\end{pmatrix}$ .

**مثال(2)** : حل المنظومة

$$2y_2+4t-y_1' = 0$$
$$y_2' + 2y_2 - 4y_1 + 4t + 2 = 0$$

مع الشروط $y_1(0) = 4 \quad , \quad y_2(0) = 5$ .

**الحـــل** : هذه منظومة خطية من المرتبة الأولى ، ذات عوامل ثابتة . نؤثر بتحويل لابلاس على طرفي المعادلتين لنحصل على :

$$s\hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 = 4 + \frac{4}{s^2}$$
$$-4\hat{y}_1 + (s+2)\hat{y}_2 = -5 - \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2}$$

هاتان معادلتان في $\hat{y}_1$ و $\hat{y}_2$ . نحلها لنحصل على :

$$\hat{y}_1 = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} \quad , \quad \hat{y}_2 = \frac{-6}{s+4} + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s^2}$$

وعليه :

$$\hat{y}_1 = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2}$$

ومنه :

$$y_1 = 3e^{-4x} + e^{2x}$$

وكذلك

$$y_2 = -6e^{-4x} + e^{2x} + 2x$$

ويكون

$$Y = \begin{pmatrix} 3e^{-4x} + e^{2x} \\ -6e^{-4x} + e^{2x} + 2x \end{pmatrix}$$

## مـــســـــائـــل

**الوحدة الثامنة**

**بند(3)**

استخدم مؤثر لابلاس لنجد حل المنظومات التالية :

(1) $y_1' = y_1 + 2y_2$

$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \;,\; y_2(0) = -5$

(2) $y_1' = y_1 + 2y_2 + e^{x}$

$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$

(3) $y_1' = y_1 + 2y_2 + u_1(x)$

$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \;,\; y_2(0) = -5$

(4) $y_1' = y_1 - 2\,y_2$

$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \;,\; y_2(0) = -5$

(5) $y_1'' = -3y_1 - 4y_2$

$y_2' = 2y_1 + 3y_2 \quad , \quad y_1(0) = 0 \;,\; y_1'(0) = 1 \;,\; y_2(0) = 0$

(6) $y_1'' = 5y_1 - 3y_2$

$y_2'' = 3y_1 - 5y_2 \quad , \quad y_1(0) = 8 \;,\; y_1'(0) = 16 \;,\; y_2(0) = y_2'(0) = 0$

---

## 4- حل المنظومات والقيم الذاتية الحقيقية المختلفة
**( Distintict real eigen values case )**

سوف نعالج في هذا البند وما يليه حل المنظومات من الشكل $Y' = AY$ وذلك بطريق القيم الذاتية . والقيم الذاتية التي نعنيها هي القيم الذاتية للمصفوفة $A$ .
وهناك ثلاث حالات لهذه القيم :

(1) قيم ذاتية حقيقية مختلفة .

(2) قيم ذاتية مركبة مختلفة .

(3) قيم ذاتية مكررة حقيقية كانت أم مركبة .

وفي هذا البند سوف نتناول الحالة الأولى .
وسوف نبدأ دراستنا بالنظرية التالية :

**نظرية 4.1 :** لنفرض أن $Y' = AY$ منظومة خطية وأن مرتبة $A$ هي $n$ . إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية حقيقية للمصفوفة $A$ وكان $E$ متجها ذاتيا بحيث $A E_\lambda = \lambda E_\lambda$ فإن $Y_\lambda = e^{\lambda t} E_\lambda$ حل للمنظومة . وفوق ذلك إذا كان $\lambda_1 , \lambda_2$ قيمتان ذاتيان مختلفتان والقيم الذاتية المقابلة هي $E_1 , E_2$ فإن $Y_1 = e^{\lambda_1 t} E_1 , Y_2 = e^{\lambda_2 t} E_2$ حلان مستقلان للمنظومة .

**البرهان :** حيث أن $A E_\lambda = \lambda E_\lambda$ فإن :

$$\begin{aligned} A Y_\lambda &= A(e^{\lambda t} E_\lambda) \\ &= e^{\lambda t} A(E_\lambda) = \lambda e^{\lambda t} E_\lambda \\ &= \lambda Y_\lambda \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_\lambda &= E_\lambda \cdot \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \\ &= \lambda e^{\lambda t} E_\lambda \\ &= \lambda Y_\lambda \quad \cdots\cdots(**) \end{aligned}$$

ملاحظين أن $E_\lambda$ لا تعتمد على $t$ . نستنتج من (*) و (**) أن :

$$Y'_\lambda = A Y_\lambda$$

أي أن $Y_\lambda$ حل للمنظومة .

والآن لنفرض أن $Y_1$ , $Y_2$ قيمتان ذاتيتان للمصفوفة A وأن $E_1$ , $E_2$ هي المتجهات الذاتية المقابلة لهما . ولنفرض أن $Y_1 = e^{\lambda_1 t} E_1$ , $Y_2 = e^{\lambda_2 t} E_2$ . فإذا كان

$$c_1 Y_2 + c_2 Y_1 = 0$$

فإن

$$c_1 Y_2(t) + c_2 Y_1(t) = 0$$

لكل قيم t في R ( حسب نظرية 2.2 ) آخذين بعين الاعتبار أن مدخولات A متصلة على R .

إذن :

$$c_1 Y_2(0) + c_2 Y_1(0) = 0$$

ولكن

$$Y_2(0) = E_2 \ , \ Y_1(0) = E_1$$

وعليه

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 = 0$$

ولكن من خصائص المتجهات الذاتية للمصفوفات ( راجع الوحدة الأولى ) فإن المتجهات الذاتية المقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة ذاتية .إذن لا بد أن يكون : $c_1 = c_2 = 0$ . وبذلك يكون $Y_1$ , $Y_2$ مستقلة .

ولا بد من ملاحظة أنه ما ينطبق على $\lambda_1$ , $\lambda_2$ ينطبق على أي عدد من القيم الذاتية .

وهذا ينهي برهان النظرية .

ولعلّه اتضح الآن كيف نحل المنظومة باستخدام القيم الذاتية . وسوف نلخص الطريقة للحالة الأولى وهي القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة وحقيقية .

أما الخطوات :

(1) جد المصفوفة A للمنظومة .

(2) جد القيم الذاتية للمصفوفة A وذلك بحل المعادلة

$$|A - \lambda I| = 0$$

(3) لنفرض أن $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_2$ هي القيم الذاتية للمصفوفة وأنها كلّها حقيقية مختلفة .

(4) جد المتجهات الذاتية المتعلقة بهذه القيم الذاتية ولنفرض أنها $E_1, \cdots\cdots, E_2$ .

(5) نضع : $Y_1 = e^{\lambda_1 t} E_1 , \cdots\cdots , Y_n = e^{\lambda_n t} E_n$

حسب نظرية 4.1 فإن $Y_1, \cdots\cdots, Y_n$ هي حلول للمنظومة $Y' = AY$ .

(6) إذا كانت $\lambda_2 , \cdots\cdots , \lambda_1$ مختلفة ( بمعنى $\lambda_i \neq \lambda_j$ إذا كان $i \neq j$ حيث $1 \le i , j \le n$ ) . فإن $Y_1 , \cdots\cdots , Y_n$ تكون مستقلة ( وفق نظرية 4.1 ) وبالتالي يكون الحل العام للمنظومة هو :

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} E_1 , \cdots\cdots + c_n e^{\lambda_n t} E_n$$

وذلك وفق نظرية 2.3 .

والآن إلى بعض الأمثلة على هذه الحالة .

**مثال(1)**: جد الحل العام للمنظومة :

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2$$
$$y_2' = y_1 - 2y_2$$

**الحـــــل** : المنظومة هنا ليست سوى $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

نجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ومنه $\lambda^2 - 1 = 0$

إذن القيم هي $\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = -1$ وهي حقيقية مختلفة. نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ :

نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ :

(i) القيمة الذاتية المتعلقة ب $\lambda_1 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن :

$$x_1 - 3x_2 = 0$$

وعليه يمكن اختيار $x_2 = 1$ وعليه $x_1 = 3$ .

ومنه $E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

وكذلك يمكن إيجاد المتجه الذاتي المتعلق بـ $\lambda = -1$ وهو في حالتنا $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

وعليه يكون الحل العام للمنظومة :

$$Y = c_1 e^{x}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

أي أن :

$$y_1 = 3c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$
$$y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

**مثال(2)** : حل المنظومة

$$Y' = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\\4 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

**الحـــل** : كما في المثال السابق نجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A . وبحل المعادلة

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\1 & -\lambda & 1\\4 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

نجد أن $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ .

وكذلك نستطيع إيجاد المتجهات الذاتية بحل المعادلات :

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

وإعطاء $\lambda$ القيم 1 , 2 , 3 .

وبعمل ذلك نحصل على :

$$E_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix},\quad E_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

وعليه يكون الحل العام

$$Y = c_1 e^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ويجب أن نلاحظ ( ونذكرك بذلك ) بأن المتجهات الذاتية المتعلقة بالقيمة الذاتيـة الواحـدة تكـون متجهاً فضائياً . وما نختاره مثلاً $E_1$ هو عنصر من عناصر الأساس . ويمكن أن نختار أي مضاعف له دون تغيير واقع الحل العام للمنظومة .

# مســــائــــل

الوحدة الثامنة

بند(4)

جد الحل العام للمنظومات التالية :

(1) $y_1' = 2y_1 - y_2 \quad , \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2$

(2) $y_1' = 2y_1 + 3y_2 \quad , \quad y_2' = y_1 + 4y_2$

(3) $y_1' = 6y_1 - 7y_2 \quad , \quad y_2' = y_1 - 2y_2$

(4) $y_1' = -3y_1 + 8y_2 \quad , \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2$

(5) $y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3 \quad , \quad y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3 \quad , \quad y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3$

(6) $y_1' = -y_1 + y_3 \quad , \quad y_2' = -y_2 + y_3 \quad , \quad y_3' = y_1 + y_2$

## 5- حالة القيم الذاتية : مركبة مختلفة

**( Distinct complex roots )**

لنفرض أن لدينا المنظومة $Y' = AY$ .

لاحظنا في البند الثالث أن كل قيمة ذاتية حقيقية $\lambda$ للمصفوفة $A$ تعطينا حلاً $Y = e^{\lambda x} E$ للمنظومة حيث $E$ هو المتجه الذاتي المتعلق بالقيمة $\lambda$ . ولاحظنا في البند الرابع أن القيم الذاتية الحقيقية المختلفة تعطينا حلولاً مستقلة للمنظومة . في هذا البند نريد علاج حالة كون أحد القيم الذاتية مركباً ، وماذا لو كان عندنا جذرين مركبين مختلفين . ونذكر هنا أن كل جذر مركب يلحق به مرافقهُ . فلا نعد ذلك اختلافاً .

ولنبدأ بالنظرية التالية :

> **نظرية 5.1 :** لنفرض أن المصفوفة $A$ لها قيمة ذاتية مركبة $\lambda = a + ib$ ( ومرافقها $\bar{\lambda} = a - ib$ ) وكان $E = B_1 + iB_2$ متجها ذاتيا متعلقا بـ $\lambda$ ، حيث مدخولات كل من $B_1$ ، $B_2$ حقيقية فإن المنظومة $Y' = AY$ لها حلان مستقلان هما :
>
> $$Y_1 = (e^{ax}\cos bx)\, B_1 - (e^{ax}\sin bx)\, B_2$$
> $$Y_2 = (e^{ax}\sin bx)\, B_1 + (e^{ax}\cos bx)\, B_2$$

**البرهان :** حيث أن $AE = \lambda E$ و $\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ فإن $Y = e^{\lambda x} E$ حل للمنظومة $Y' = AY$ وذلك بسبب :

$$Y' = \frac{d}{dx}(e^{\lambda x} E) = \lambda e^{\lambda x} E = \lambda Y$$
$$= AY.$$

وكذلك : $\bar{Y} = e^{\bar{\lambda} x} \bar{E}$ حل لنفس المنظومة وذلك :

$$\bar{Y} = \frac{d}{dx}\left(e^{\bar{\lambda} x} \bar{E}\right) = \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} x} \bar{E} = \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} x} \bar{E}$$
$$= \bar{\lambda}\bar{Y} = A\bar{Y} \ .$$

ملاحظين أن $\bar{\lambda}$ هي قيمة ذاتية وأن $\bar{E}$ متجه ذاتي متعلق بالقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$ .

ولكننا لا نريد أن نستخدم الأسس المركبة أو المدخولات المركبة . ولذلك لا بد من تغيير شكل

Y بحيث لا تظهر الأسس والمدخولات المركبة . من أجل ذلك نستخدم قانون أيلر :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ويكون :

$$Y = e^{(a+ib)x}(B_1 + iB_2) = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)(B_1 + iB_2)$$
$$\overline{Y} = e^{(a-ib)x}(B_1 - iB_2) = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)(B_1 - iB_2)$$

وحيث أن كلاً من $Y$ , $\overline{Y}$ حل للمنظومة $Y' = AY$ ، فكذلك كل من الاقترانين :

$$Y_1 = \frac{e^{\lambda x}E + \overline{E}e^{\bar{\lambda} x}}{2} = e^{ax}[B_1\cos bx - B_2\sin bx]$$

$$Y_2 = \frac{e^{\lambda x}E - \overline{E}e^{\bar{\lambda} x}}{2} = e^{ax}[B_2\cos bx + B_1\sin bx]$$

وكلا الحلّين لا أثر للأعداد المركبة فيهما . وهما أيضاً مستقلان وفق قواعد الاستقلال التي ناقشناها في الوحدة الأولى .

وهذا ينهي البرهان .

إذن وفق هذه النظرية فإن كل جذر مركب ( ومرافقه ) يعطينا حلّين مستقلين .

والآن لنأخذ بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : حل المنظومة $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**الحــــل** : نجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ :

$$|A - \lambda I| = 0$$

ومنه $\lambda^2 + 1 = 0$ . إذن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي $\lambda_1 = i$ , $\lambda_2 = -i$ وعليه $a = 0$ , $b = 1$ .

نجد الآن المتجهات الذاتية ، وذلك بحل المعادلة : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ونجد أن $E_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ , $E_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ،

وعليه

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 + i B_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 - i B_2$$

وحسب نظرية 5.1 فإن حلول المنظومة هي :

$$Y_1 = (\cos x)\, B_1 - (\sin x)\, B_2$$

$$Y_2 = (\sin x)\, B_1 - (\cos x)\, B_2$$

والحل العام هو $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$ .

**مثال(2)** : جد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

**الحـــل** : نجد أولاً القيم الذاتية للمصفوفة $A$ :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ومنه $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ . وجذور هذه المعادلة هي :

$\lambda_2 = -2-i \quad , \quad \lambda_1 = -2+i$ .

ومنه $b = 1 \quad , a = -2$ .

ثم بعد ذلك نجد المتجهات الذاتية ل $A$ :

ولو قمنا بالحسابات لوجدنا أن :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1 + i B_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1 - i B_2$$

وعليه :

$$Y_1 = (e^{2x}\cos x)\, B_1 - (e^{2x}\sin x)\, B_2$$

$$Y_2 = (e^{2x}\sin x)\, B_1 + (e^{2x}\cos x)\, B_2$$

والحل العام هو $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ .

---

## مســـــائــل

**الوحدة الثامنة**

**بند(5)**

حل المنظومات التالية :

$$(1)\quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \; Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad Y' = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \; Y(0) = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \; Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad , \; Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 6- حالة التكرار ( Repeated eigen values )

ماذا لو كانت احدى القيم الذاتية مكررة سواء كانت حقيقية أم مركبة ؟ ما هي الحلول التي تنتجها هذه القيمة ؟

ذلك موضوع هذا البند .

وإليك النظرية التي تعطينا النتيجة في هذا المجال في حالة القيم الحقيقية .

**نظرية 6.1** : (i) لنفرض أن $\lambda$ قيمة ذاتية حقيقية للمصفوفة $A$ ومكررة $k$ من المرات . فإن المنظومة $Y' = AY$ لها $k$ من الحلول المستقلة من الشكل :

$$Y_1 = e^{\lambda x} E_{11}$$
$$Y_2 = e^{\lambda x} E_{21} + x e^{\lambda x} E_{22}$$
$$\vdots$$
$$Y_k = e^{\lambda x} E_{k1} + x e^{\lambda x} E_{k2} + \cdots + x^{k-1} e^{\lambda x} E_{kk}$$

حيث $E_{ij}$ عناصر في $R^n$ .

وبرهان هذه النظرية فوق مستوى هذا الكتاب . ولذلك لا نستطيع أن نعرضه هنا ( خوفاً عليك من إنهاء الصُحبة ) .

إذن كل قيمة ذاتية تعطينا حلولاً مستقلة بعدد مرات تكرارها ، (ولقد مرت معنا مثل هذه الفكرة في وحدة المعادلات الخطيّة ذات العوامل الثابتة ) .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1)** : حل المنظومة

$$y_1' = -2y_1 - 3y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_2$$

**الحل** : هنا المنظومة هي $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

نجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$$

وعليه $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

نجد الان المتجهات الذاتية المتعلقة بالقيمة $\lambda = 1$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومن هذه نحصل على $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ متجه ذاتي للمصفوفة $A$ ( وهو أساس المتجه الأساسي للمتجهات الذاتية للقيمة $\lambda = 1$ ) .

إذن من نظرية 4.1 يكون $Y_1 = e^x E$ هو الحل الأول للمنظومة . ونحتاج أن نجد حلا آخر $Y_2$ مستقلاً عن $Y_1$ . وهنا نستخدم نظرية 6.1 . فشكل $Y_2$ هو :

$$Y_2 = e^x B + x e^x C$$

حيث $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ .

وحتى نجد $Y_2$ لا بد من أيجاد $c_1$ , $c_2$ و $b_1$ , $b_2$ . وهذه نجدها بالتعويض في المنظومة :

$$Y_2' = A\, Y_2$$

أي :

$$e^x B + e^x C + x e^x C = A\left[e^x B + x e^x C\right]$$

وعليه :

$$\begin{pmatrix} e^x(b_1 + c_1) + x e^x c_1 \\ e^x(b_2 + c_2) + x e^x c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x b_1 + x e^x c_1 \\ e^x b_2 + x e^x c_2 \end{pmatrix}$$

وهذه تعطينا :

$$(3b_1 + 3b_2)xe^x + (b_1 + 3c_1 + 3c_2)e^x = 0$$
$$(3b_1 + 3b_2)xe^x + (-b_2 + 3c_1 + 3c_2)e^x = 0$$

ومن تلك المعادلات نحصل على :

$$b_2 = -b_1$$
$$c_2 = -\frac{1}{3}b_1 - c_1$$

حيث $b_1$ , $c_1$ قيم اختيارية .

وعليه إذا اخترنا $b_1 = 3$ , $c_1 = 0$ نحصل على :

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون :

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x e^x$$

والحل العام :

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

والآن ماذا لو كانت القيمة الذاتية المكررة مركبة ؟

نحن نعلم أن القيمة الذاتية المركبة ( ومرافقها ) تعطينا حلين مستقلين للمنظومة . وعليه إذا كررت القيمة الذاتية المركبة نتوقع أن تعطينا أربعة حلول . فكيف يكون ذلك ؟ لا يختلف الوضع عن حالة القيم الحقيقية . وإليك البيان :

**نظرية 6.2 :** إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية مركبة للمصفوفة $A$ ومكررة $k$ من المرات . فإن المنظومة $Y' = AY$ لها $2k$ من الحلول المستقلة من الشكل :

$$Y_1 = e^{\lambda x} E_{11} \quad , \quad \overline{Y}_1$$

$$Y_2 = e^{\lambda x} E_{21} + x e^{\lambda x} E_{22} \quad , \quad \overline{Y}_2$$

$$\vdots$$

$$Y_k = x^{k-1} e^{\lambda x} E_{k1} + x e^{\lambda x} E_{k2} + \cdots + e^{\lambda x} E_{kk} \quad , \quad \overline{Y}_k$$

ومرة أخرى سوف لن نعرض برهان هذه النظرية في هذا الكتاب . وربما تتسائل شكل الحلول الواردة في هذه النظرية يحوي على أعداد مركبة وأسس مركبة ، لكننا نريد حلولاً خالية من الأعداد المركبة . فكيف يكون ذلك ؟ .

يمكن اتباع خطوات نظرية 5.1 للحصول على حلول حقيقية خالية من الأعداد المركبة . ودعنا نقوم بالعملية لك فيما لو كانت $\lambda$ مكررة مرتين فقط ( ونترك لك ما فوق ذلك ) .

لنفرض أن $\lambda = a + ib$ مكررة مرتين .

من نظرية 5.1 هناك حلان للمنظومة $Y' = AY$ :

$$Y_1 = (e^{ax}\cos bx)\, B_1 - (e^{ax}\sin bx)\, B_2$$
$$Y_2 = (e^{ax}\sin bx)\, B_1 + (e^{ax}\cos bx)\, B_2$$

حيث $E = B_1 + i\,B_2$ هو المتجه الفضائي المتعلق بـ $\lambda$ .

أما الحلان الآخران فيمكن الحصول عليهما بالشكل التالي :

نظرية 6.2 تقول أن شكلهما هو :

$$Z = xe^{\lambda x} D + C\, e^{\lambda x}$$
$$\overline{Z} = xe^{\bar\lambda x} D + \overline{C}\, e^{\bar\lambda x}$$

حيث $D = D_1 + iD_2$ , $C = C_1 + iC_2$ .

ولكن هذه حلول تحوي أعداداً مركبة . وحتى نحصل على حلول حقيقية بحتة نأخذ الحلين :

$$Y_3 = \frac{Z + \overline{Z}}{2}$$
$$Y_4 = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$$

وكلاهما حل للمنظومة $Y' = \Lambda Y$ لأن مجموعة حلول تلك المنظومة تشكل متجها فضائيا .

وعليه :

$$Y_3 = \frac{1}{2}\left(xe^{\lambda x} D + xe^{\bar\lambda x}\overline{D} + ce^{\lambda x} + \bar{c}e^{\bar\lambda x}\right)$$
$$Y_4 = \frac{-i}{2}\left(xe^{\lambda x} D - xe^{\bar\lambda x}\overline{D} + ce^{\lambda x} - \bar{c}e^{\bar\lambda x}\right)$$

وبالتبسيط وتجميع الحدود نحصل على :

$$\boxed{\begin{aligned} Y_3 &= e^{ax}\cos bx\,[C_1 + xD_1] - e^{ax}\sin bx\,[C_2 + xD_2] \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\ Y_4 &= e^{ax}\cos bx\,[C_2 + xD_2] + e^{ax}\sin bx\,[C_1 + xD_1] \end{aligned}}$$

حيث : $D_2 = \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix}$ , $D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix}$ , $C_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ , $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}$ .

وهذا هو الشكل الذي وعدناك به .

والآن دعنا نعرض لك مثالاً .

**مثال(2)** : جد الحل العام للمنظومة $Y' = A\,Y$ :

حيث $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**الحـــــل** : أولاً نجد القيم الذاتية لـ A :

$$|A - \lambda I| = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

ومنها $\lambda_1 = 2i$ , $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -2i$ وكل منها مكرر مرتين .

نجد الآن متجهات ذاتية متعلقة بـ : $\lambda_1 = 2i$ . ولو قمنا بالحسابات لوجدنا :

$$E = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 + i\,B_2$$

هو متجه ذاتي لـ A .

ووفق نظرية 5.1 فإن هناك حلان :

$$Y_1 = \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

والآن من الشكل (*) الذي حصلنا عليه من نظرية 6.2 فإن :

$$Y_3 = \cos 2x\left[C_1 + x\,D_1\right] - \sin 2x\left[C_2 + x\,D_2\right]$$

$$Y_4 = \cos 2x\left[C_2 + x\,D_2\right] + \sin 2x\left[C_1 + x\,D_1\right]$$

حيث لا بد من إيجاد $C_1\ , D_1\ , C_2\ ,\ D_2$ .

ونستطيع أن نجدها بالتعويض في المعادلة . ولو قمنا بذلك لوجدنا :

$$Y_3 = \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$$

أي أن الحسابات تعطينا $D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ وأنه يمكن اختيار $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

وقبل أن ننهي البند عند هذا الحد نود أن نذكر لك أن المصفوفة $A$ لها متجهان ذاتيان مستقلان متعلقان بالقيمة $\lambda = 2i$ وهما

$$E_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

والمتجه $E_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ أعطانا الحلين $Y_1$ , $Y_2$ .

والمتجه $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ يعطينا بنفس الطريقة حسب نظرية 5.1 حلان :

$$Y_3 = \cos 2x\, D_1 - \sin 2x\, D_2$$

$$= \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

وكذلك :

$$Y_4 = \sin 2x\ D_1 + \cos 2x\ D_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$$

حيث $E_2 = D_1 + i\,D_2$ .

هلاّ لاحظت أننا حصلنا على نفس مجموعة الحلول $Y_4, \cdots\cdots, Y_1$ ؟

---

# مســـــائــل

**الوحدة الثامنة**

**بند(6)**

جد الحل العام للمنظومات التالية :

$$(1)\quad Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad Y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (6)\quad Y' = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(7)\quad Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

## 7- المنظومات غير المتجانسة.

**( Non - Homogenous systems )**

في البنود السابقة عالجنا مسألة حل المنظومة $Y' = AY$ . وفي هذا البند سوف نعالج حل المنظومة $Y' = AY + F$ .

ولا بد من الملاحظة أنه إذا كان $Y_h$ هو الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ وكان $Y_p$ هو حل خاص للمنظومة $Y' = AY + F$ فإن $Y_g = Y_h + Y_p$ هو الحل العام للمنظومة $Y' = AY + F$ . وهذا يذكرنا بالحل العام والمعالجات التي قمنا بها للمعادلات $L(y) = f$ في الوحدة الرابعة .

وإيجاد $Y_h$ هو إيجاد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$. وهذا ما قمنا به في البنود السابقة . أما كيف نجد $Y_p$ فهو موضوع هذا البند .

وهناك طريقتان لإيجاد $Y_p$ :

(1) طريقة العوامل غير المعينة .

(2) طريقة تغير الوسطاء .

ولنبدأ بالطريقة الأولى :

### طريقة العوامل غير المعينة

هذه الطريقة تصلح إذا كان $F$ من الشكل :

$$F(t) = (\cos at)B \quad , \quad F(t) = (\sin at)B \quad , \quad F(t) = e^{at} B \quad , \quad F(t) = \sum_{m=0}^{k} t^m B_m$$

أو أن تكون خليطاً من هذه الأشكال ، حيث $B , B_m$ عناصر في $R^n$ ( n هي المرتبة A ) .

ويكون $Y_p$ له نفس شكل $F$ في كل من هذه الحالات ، على النحو التالي :

$$(1) \qquad F(t) = \sum_{m=0}^{k} t^m B_m \quad : \quad Y_p = \sum_{m=0}^{k} t^m C_m$$

حيث $C_m$ هي العوامل التي يراد تحديدها .

$$(2) \qquad F(t) = e^{at} B \quad : \quad Y_p = e^{at} C$$

حيث $C$ عامل يراد تحديده .

$F(t) = \sin at \; B$ (3) أو $F(t) = \cos at \; B$ :

$$Y_p = \cos at \; C_1 + \sin at \; C_2$$

حيث $C_1$ , $C_2$ هي العوامل التي يراد تحديدها .

وتوجد العوامل في جميع الحالات عن طريق التعويض في المعادلة .ولنأخذ أمثلة على ذلك .

**مثال(1)** : جد $Y_p$ للمنظومة $Y' = AY + F$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad F(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; .$$

**الحـــل** : هنا $F = tB$ وعليه فإن $Y_p = C_0 + t\,C_1$ . نعوض في المنظومة

لنحصل على : $Y_p' = A\,Y_p + F$

ولكن $Y_p' = C_1$ . ومنه :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\left[C_0 + t\,C_1\right] + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لنفرض أن $C_1 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ , $C_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}$ .

إذن

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} + t\,c_{21} \\ c_{12} + t\,c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} + t\,c_{21} + 2c_{12} + 2t\,c_{22} + t \\ 2c_{11} + 2t\,c_{21} + 3c_{12} + 3t\,c_{22} + 3t \end{pmatrix}$$

ومنه

$$c_{21} = c_{11} + 2c_{12} + (c_{21} + 2c_{22} + 1)t$$
$$c_{22} = 2c_{11} + 3c_{12} + (2c_{21} + 3c_{22} + 3)t$$

وعليه :

$$c_{22} = c_{11} + 2c_{12}$$
$$c_{21} + 2c_{22} + 1 = 0$$
$$c_{22} = 2c_{11} + 3c_{12}$$
$$2c_{21} + 3c_{22} + 3 = 0$$

نحل هذه المعادلات لنحصل :

$$c_{22}=1 \quad , \quad c_{21}=-3 \quad , \quad c_{12}=-7 \quad , \quad c_{11}=11$$

إذن :

$$Y_p=\begin{pmatrix}11\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

**مثال(2)** : جد $Y_p$ للمنظومة $Y'=AY+F$ حيث :

$$F(t)=\sin 2t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} .$$

**الحل** : حيث $F=(\sin 2t)\,B$ ، فإن :

$$Y_p=(\sin 2t)C_1+(\cos 2t)\,C_2$$

حيث $C_2$ , $C_1$ يراد تعيينها . ولعمل ذلك نعوض $Y_p$ في المنظومة :

$$Y_p'=A\,Y_p+F$$

ولكن $A\,Y_p=Y_p$ . وكذلك :

$$Y_p'=2\cos 2t\ C_1-2\sin 2t\ C_2$$

إذن :

$$2\cos 2t\ C_1-2\sin 2t\ C_2=(\sin 2t)\,C_1+(\cos 2t)\,C_2+(\sin 2t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

نجمع الحدود المتشابهة :

$$\cos 2t\,(2C_1+C_2)-\sin 2t\left[2C_2-C_1-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]=0$$

إذن :

$$2C_1+C_2=0$$

$$2C_2-C_1-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$$

لنفرض أن $C_1=\begin{pmatrix}c_{21}\\c_{22}\end{pmatrix}$ , $C_0=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{12}\end{pmatrix}$ .

إذن

$$2\,c_{11}+c_{21}=0$$

$$2c_{21}+c_{22}=0$$

$$2c_{21}-c_{11}-1=0$$

$$2c_{22}-c_{12}-1=0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على :

$$c_{21}=\frac{2}{5} \quad , \quad c_{11}=-\frac{1}{5} \quad , \quad c_{22}=\frac{2}{5} \quad , \quad c_{12}=-\frac{1}{5}$$

إذن :

$$C_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad , \quad C_2=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

ويكون :

$$Y_p = \sin 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

والآن إلى الطريقة الثانية لإيجاد حلاً خاصاً للمنظومة $Y' = AY + F$ .

## طريقة تغيير الوسطاء

فكرة تغيير الوسطاء ليست جديدة . فهي نفس فكرة ايجاد حل خاص للمعادلة $L(y) = f$ التي وردت في الوحدة الرابعة .

وملخص الطريقة كما يلي :

المنظومة المعطاة هي $Y' = AY + F$ .

(1) نجد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ ، ولنفرض أنه :

$$Y_h = c_1 Y_1 + \cdots\cdots + c_n Y_n$$

حيث $n$ هو مرتبة المصفوفة $A$ ،

(2) يكون شكل $Y_p$ هو :

$$Y_p(x) = c_1(x) Y_1(x) + \cdots\cdots + c_n(x) Y_n(x)$$

أي أننا غيرنا الثوابت $c_i$ إلى اقترانات في $x$ .

(3) نجد هذه الاقترانات $c_i$ عن طريق التعويض في المعادلة . والتعويض واستخدام كون $Y_i$ حل للمنظومة $Y' = AY$ . يتركنا مع :

$$c_1'(x)Y_1(x) + \cdots\cdots + c_n'(x)Y_n(x) = F(t)$$

وهذه تعطينا n من المعادلات حيث أن $Y_1, \cdots\cdots, Y_n, F$ هي متجهات في $R^n$ .

وطريقة تغيير الوسطاء تصلح لكل أنواع F .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(2)** : جد الحل العام للمنظومة $Y' = AY + F$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F(x) = \begin{pmatrix} -2e^x \\ 9x \\ e^x \end{pmatrix} .$$

**الحـــل** : نلاحظ هنا أنه يمكن إيجاد $Y_p$ بطريقة العوامل غير المعينة . إلا أننا سنستخدم طريقة تغيير الوسطاء لفعل ذلك .

وعليه نجد أولاً الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ .

نبدأ بإيجاد القيم الذاتية : $|A - \lambda I|$

ومنه $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$ . وعليه :

$\lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = 3$ ( ومكررة مرتين ) .

نجد المتجهات الذاتية المتعلقة بهذه القيم . ولو أجرينا الحسابات لوجدنا :

$E_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ يقابل $\lambda = -1$ .

$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ يقابلان $\lambda = 3$ .

وعليه $Y_1 = e^{-x}E_1 \ , \ Y_2 = e^{3x}E_2$ , و $Y_3 = e^{3x}E_3$ .

ومنه

$$Y_h = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2c^{-x} \\ 0 \\ e3^{-x} \end{pmatrix}$$

والآن حتى نجد $Y_p$ نجد $c_1(x), c_2(x), c_n(x)$ والتي تحقق

$$c_1'(x)Y_1(x) + c_2'(x)Y_2(x) + c_3'(x)Y_3(x) = F(x)$$

كما جاء في خطوات طريق تغيير الوسطاء.

ولو قمنا بذلك لوجدنا :

$$c_1'(x) = e^{2x} \ , \ c_2'(x) = \ 9xe^{3x} \ , \ c_3'(x) = 0$$

ومنه

$$c_1'(x) = \frac{e^{2x}}{2} , \ c_2'(x) = \ -3xe^{-3x} - e^{-3x} \ , \ c_3'(x) = 0$$

وعليه يكون :

$$Y_p(x) = \frac{e^{2x}}{2} Y_1 + (-3xe^{-3x} - e^{-3x}) \ Y_2$$

ويكون الحل العام :

$$Y_g = \ Y_h + Y_p$$

دعنا الآن ننهي هذا البند عند هذا الحد . لننتقل إلى الفصل الأخير من كتابنا هذا ، وهي المحطة الأخيرة في صحبتنا معا .

## مـســـائـــل

**الوحدة الثامنة**

**بند(7)**

جد الحل العام للمنظومات التالية :

$$(1)\quad Y' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^{3x} \\ 4e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4e^{x} \\ 12e^{x} \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad Y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{3x} \\ 5e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$(6)\quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - e^{x} \\ -2e^{x} \end{pmatrix}$$

# الوحدة التاسعة

## تطبيقات للمعادلات

## " Applications of Differential Equation "

في هذه الوحدة سوف نعطي بعض التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية سواء في الفيزياء أوغيرها .

وعندما نتحدث عن التطبيقات للمعادلات التفاضلية لا نعني شيئاً جديداً بل نعني أن هناك ظواهر كثيرة ( في الفيزياء أو الكيمياء أو غيرها ) تحكمها معادلات تفاضلية وبحل المعادلة نستطيع أن ندرس الظاهرة .

وسوف نفرد لكل مجموعة من المعادلات تطبيق أو تطبيقين .

## ١- تطبيقات معادلات الرتبة الأولى .

**( Application of first order differential equations )**

هناك العديد من الظواهر في الحياة العملية يحكمها معادلة من المرتبة الأولى . وفي هذا البند سوف نعرض تطبيقين لمعادلات المرتبة الأولى .

(A) تطبيق رياضي ( في فرع الهندسة : Geometry ) .

(B) تطبيق فيزيائي ( مسائل الخليط : Mixture Problems ) .

ولنبدأ بأولهما .

### (A) المسارات المتعامدة ( Orthogonal Trajectories )

أولاً ماذا نعني بالمسار ؟

نحن نعرف أن المعادلة في x و y في المستوى تمثل منحناً معيناً . فمثلاً $x^2 + y^2 = r^2$ يمثل دائرة مركزها $(0 , 0)$ ونصف قطرها r . فإذا تغيرت قيمة r تغيرت الدائرة .

وعليه :

**تعريف 1.1** : المسار هو عائلة من المنحنيات تمثلها عائلة من المعادلات $F(x,y,c) = 0$ .
فكل قيمة لـ c تعطينا معادلة تمثل لنا عنصراً من عناصر العائلة .

فمثلاً $x^2 + y^2 = c^2$ هي $F(x,y,c) = 0$ حيث $F(x,y,c) = x^2 + y^2 - c^2$ . وهذه تمثل عائلة من الدوائر . لكل قيمة للوسيط c ( $c > 0$ ) نحصل على دائرة نصف قطرها c .

كذلك $y = x^2 + c$ هي عائلة من المنحنيات كل عنصر فيها قطع مكافئ .

وسوف نفرض في هذا الباب أن y قابل للاشتقاق بالنسبة لـ x .

لنفرض الآن أن $F(x,y,c) = 0$ ، $G(x,y,b) = 0$ هما مسارين . قد تقاطع عناصر $F(x,y,c) = 0$ عناصر $G(x,y,b) = 0$ وقد لا تقاطع . لنفرض أن $F(x,y,c_1) = 0$ قاطع $G(x,y,b_1) = 0$ عند النقطة $(x_1 , y_1)$ . عند هذه النقطة هناك مماس $L_1$ للمنحنى $F(x,y,c_1) = 0$ ومماس $L_2$ للمنحنى $G(x,y,b_1) = 0$ .

$L_1$ ، $L_2$ مستقيمان يتقاطعان في النقطة $(x_1 , y_1)$ .

يكون المنحنيان متعامدان عند $(x_1 , y_1)$ إذا كان $L_1$ عمودي على $L_2$ .

والآن نعرف المسارات المتعامدة :

**تعريف 1.2 :** نسمي $F(x,y,c)=0$ ، $G(x,y,b)=0$ . مسارين متعامدين إذا كان كل عنصر في المسار الأول عمودياً على كل عنصر في المسار الثاني عند نقاط تقاطعهما .

والمسألة الآن : إذا أعطينا مساراً $F(x,y,c)=0$ فكيف نجد المسار العمودي عليه ؟ .

**ملخص الطريقة**

**(i)** نجد المعادلة التفاضلية التي حلها هو $F(x,y,c)=0$ .

وهذا يتم عن طريق تفاضل معادلة المسار ثم حذف الوسيط c . ولنفرض أن المعادلة هي $\hat{F}(x,y,y')=0$ .

**(ii)** نضع $-\frac{1}{y'}$ بدلاً من $y'$ في المعادلة التفاضلية $\hat{F}(x,y')=0$ لنحصل على $\hat{F}(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ .

**(iii)** نحل المعادلة $\hat{F}(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ لنحصل على مسار $G(x,y,b)=0$ . وهو المسار المطلوب.

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(1) :** جد المسار المعامد للمسار $y=cx^2$ .

**الحـــل :** نتبع خطوات الطريق أعلاه :

$y'=2cx$ . إذن $c=\frac{y'}{2x}$ . وعليه $y=\frac{y'}{2x}\cdot x^2$ . أي أن : $y'=\frac{2y}{x}$ هي المعادلة التي حلها $y=cx^2$ .

وعليه المعادلة التفاضلية التي حلّها هو المسار المعامد هي :

$-\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x}$ أي أن :

$$2y\,dy+x\,dx=0$$

وهي معادلة مفصولة المتغيرات . نحلها لنجد:

$$y^2+\frac{x^2}{2}=b$$

وهي المسار المعامد . ونلاحظ هنا أن كل عنصر في هذا المسار هو قطع ناقص ( $b>0$ ) .

**مثال(2) :** جد المسار المعامد للمسار $x^2+y^2=2cy$ .

**الحـــل** : نجد أولاً المعادلة التفاضلية التي حلها هو معادلة المسار :

$$2x + 2yy' = 2cy'$$

ولكن من معادلة المسار : $c = \dfrac{x^2 + y^2}{2y}$

إذن $2x + 2yy' = 2\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2y}\right)y'$

أي أن المعادلة التفاضلية هي :

$$y' = \frac{-2xy}{y^2 - x^2} \quad \text{.........} (*)$$

نضع $-\dfrac{1}{y'}$ بدلاً عن $y'$ في المعادلة(*) لنحصل على $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ وهي المعادلة التي حلها المسار المعامد . هذه المعادلة متجانسة . نحلها كما تعلمنا في الوحدة الثانية لنحصل على :

$$x^2 + y^2 = bx$$

وهي المسار المعامد .

## (B) مسألة الخليط

هناك عدة مسائل متعلقة بالخليط ( أو المحاليل ) . لكننا سوف نعرض أحدها ( وربما أبسطها ) .

ملخص المسألة :

وعاء يحتوي على محلول ذي كثافة معينة . نضيف لهذا المحلول محلولاً آخر ( ذا كثافة مختلفة ) ويخرج الخليط المحرك دائماً (لتكون الكثافة الجديدة متجانسة في المحلول ) من الإناء . ونود معرفة الكثافة في أي زمن t أو مقدار المادة المذابة في السائل في أي زمن t .

وحتى نجد المعادلة التي تحكم هذه المسألة :

نفرض أن y هو مقدار المادة المذابة في السائل عند أي زمن t . فإن معدل التغير الآني لـ y هو $\dfrac{dy}{dt}$.

وهذا التغير الآني ليس سوى الفرق بين معدل ما يضاف ومعدل ما يخرج ( أو يطرد ) من المادة .

والمعدلان الأخيران يكونان عادة معلومين . إذن المعادلة التي تحكم المسألة هي :

$\dfrac{dy}{dt}$ = ( معدل ما يضاف من المادة ) − ( معدل ما يطرد من المادة )

وتسمى هذه المعادلة معادلة المحافظة .

والآن إلى بعض الأمثلة .

**مثال(3)** : وعاء سعته 200 غالون مملوء بالماء الصافي . وفي لحظة ما بدأنا بإضافة محلول الملح ( ماء مذاب فيه ملح ) بمعدل غالونين في الدقيقة ، وفي الوقت نفسه نطرد المحلول ( المحرك بانتظام ) من الوعاء بمعدل غالونين في الدقيقة . فإذا كان تركيز المحلول 4 باونداً للغالون الواحد ، فجد مقدار الملح في أي زمن .

**الحـــل** : جزء كبير من حل السؤال يكمن في فهم نص السؤال وفهم معطيات السؤال .
نلاحظ أولاً أن مقدار المحلول المضاف هو نفس مقدار المحلول المزاح ( حجماً ) . ولذلك يكون عدد الجالونات من المحلول في الوعاء ثابت وهو 200 غالون .
وعليه إذا كان $y(t)$ هو مقدار الملح في الوعاء في أي زمن $t$ فإن تركيز المحلول عند أي زمن $t$ هو $\frac{y(t)}{200}$ .

وعليه فإن معدل إزاحة الملح من الوعاء هو $2\left(\frac{y}{200}\right)$.
أما معدل إضافة الملح فهي $4\times2$ ( وهي ليست سوى تركيز المحلول [ 4 باوند في الجالون ] مضروب في معدل إضافة المحلول [ 2 غالون في الدقيقة ] ) .

وعليه من معادلة المحافظة :

$$\frac{dy}{dt} = 8 - \frac{y}{100}$$

وهذه معادلة من الدرجة الأولى مفصولة المتغيرات . نحلها لنحصل على :

$$-\ln|800 - y| = \frac{t}{100} + c$$

أي :

$$800 - y = be^{-\frac{t}{100}}$$

ولكن من المعطيات ، عندما بدأنا نضيف المحلول إلى الوعاء كان مقدار الملح في الوعاء صفراً . أي أن $y(0) = 0$ . ومن هذا نحصل على $b = 88$ .
إذن مقدار الملح عند أي زمن $t$ هو :

$$y = 88\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right)$$

وهذا ينهي الحل .

ولا بد من أن نذكر هنا أن الشرط الأولى $y(0) = 0$ قد يتغير من مسألة إلى أخرى . فمثلا إذا كان الوعاء يحوي على 12 باونداً من الملح قبل البدء في إضافة المحلول فإن $y(0) = 12$ .

ومثلاً إذا أعطينا أن تركيز المحلول بعد 3 دقائق هو $\frac{1}{2}$ باوند للغالون الواحد . فإن الشرط الأولي يصبح $y(3) = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100$ .

وهكذا لا بد من فهم المعطيات في المسألة .

---

# مســــــائــــل

## الوحدة التاسعة

**بند(1)**

جد المسارات المتعامدة لكل من المسارات التالية :

(1) $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$ (2) $xy = c$

(3) $y = x - 1 + ce^{x}$ (4) $x(y^2 + 1) + xy^2 = c$

(5) $(x + y)^2 = cx^2$ (6) $y = \ln(x^3 + c)$

(7) وعاء يحوي على 200 غالون من الماء الصافي . أضيف إليه محلول بتركيز 3 باوند/ غالون بمعدل 4 غالون / دقيقة .

(a) إذا حرك المزيج جيدا وترك يخرج من الوعاء بمعدل 4 غالون / الدقيقة ، جد مقدار الملح في الوعاء بدلالة الزمن .

(b) بعد كم دقيقة يصبح تركيز المحلول 2 باوند / غالون .

(8) حل المسألة السابقة إذا كان معدل ترك المزيج للوعاء هو 5 غالون / دقيقة .

(9) وعاء يحوي على 10 غالون ماء بها 5 باوند من الملح .أُضيف إليه محلول ملح ذو تركيز 3 باوند /غالون بمعدل 2 غالون /دقيقة ، وترك المزيج الجديد يخرج من الوعاء بنفس المعدل . ما مقدار الملح الموجود في الوعاء بعد 15 دقيقة.؟

---

## 2- تطبيقات للمعادلات الخطية من المرتبة الأولى .

**( Application of first order linear differential equations )**

سوف نعرض في هذا البند تطبيقين :

(1) قانون نيوتن للتبريد .

(2) الحركة بوجود قوة احتكاك تعتمد على السرعة .

والقضية مرة أخرى أن هناك معادلة تفاضلية لكل مسألة من هاتين المسألتين تحكمها . ولنبدأ بالتطبيق الأول .

### قانون نيوتن للتبريد

**( Newton`s law of coolling )**

ما هي المسألة هنا ؟

جسم درجة حرارته $y(t)$ عند الزمن $t$ . غمس هذا الجسم في وعاء حافظ للحرارة ذو درجة حرارة ثابتة $T$ . والمطلوب معرفة تغير حرارة الجسم بعد غمسه في الوعاء .

إن قانون نيوتن للتبريد يقول :

إن معدّل تغير درجة حرارة الجسم متناسبة طردياً مع الفرق بين درجة حرارة الوعاء $T$ ودرجة حرارة الجسم $y(t)$ .

بمعنى آخر :

$$\frac{dy}{dt} = \lambda\,(T - y(t)) \qquad \lambda > 0 .$$

أي :

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} + y(t) = T \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

هذه معادلة خطية من المرتبة الأولى . نعرف كيف نحلها كما مرّ في الوحدة الثالثة . والحل هو :

$$y = T + ce^{-\lambda t}$$

أما $c$ فإننا نجده من الشروط الأولية كأن تكون درجة حرارة الجسم عند $t = 0$ مقدارا ما $y_0$ مثلاً. حينها $y_0 = T + c$ أي أن $c = y_0 - T$ . وعليه تصبح المعادلة التي تحكم المسألة :

$$\boxed{y = T - (T - y_0)e^{-\lambda t}}$$

ولنأخذ مثالاً على ذلك .

**مثال(1) :** جسم حرارته $72^\circ F$ . وضع في العراء حيث درجة حرارة الجو $20^\circ F$ . بعد خمس دقائق أصبحت درجة حرارة الجسم $55^\circ F$ . بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة الجسم $32^\circ F$ ؟.

**الحـــل :** هذه مسألة على قانون نيوتن للتبريد . والمعادلة التي تحكم المسألة هي المعادلة (*) وبعد حلها نحصل على :

$$y = T - (T - y_0)e^{-\lambda t}$$

والآن لنتعرف على المعطيات .

$T$ : هي درجة حرارة الوعاء الحافظ للحرارة ( وهو الجو في حالتنا ) ومقدارها $20^\circ F$ .

$y_0$ : درجة حرارة الجسم قبل إخراجه إلى العراء أي عند $t = 0$ . وفي حالتنا $y_0 = 72^\circ F$ .

وعليه :

$$y = 20 - (20 - 72)\, e^{-kt}$$

$$= 20 + 52\, e^{-kt}$$

لم يبق في المعادلة مجهول سوى $k$ . ولكن معطى لنا أن $y(5) = 55$ . إذن

$$55 = 20 + 52\, e^{-5k}$$

وهذه المعادلة تعطينا مقدار $k$ . ولو حسبنا لوجدنا $k = \frac{1}{5}\ln\frac{52}{35}$ .إذن الشكل النهائي للمعادلة :

$$y = 20 + 52\, e^{-\left(\frac{1}{5}\ln\frac{52}{35}\right)t}$$

والمطلوب الآن إيجاد $t$ عندما يكون $y = 32$ . أي أن علينا أن نجد $t$ من المعادلة :

$$32 = 20 + 52\, e^{\left(\frac{1}{5}\ln\frac{52}{35}\right)t}$$

ولو قمنا بالحل لوجدنا أن :

$$t = 5\ln\left(\frac{12}{52}\right) / \ln\left(\frac{35}{52}\right) \approx 18.5$$

إذن لا بد من الملاحظة أن المعادلة $y = T - (T - y_0)e^{-\lambda t}$ تحوي على ثابتين هما $y_0$ , $-k$ . والمعطيات يجب أن تكون قادرة وكافية لنجد منها $y_0$ , $-k$ . ثم بعد ذلك نجد ما نريد إيجاده وندرس ما نريد دراسته على ضوء المعادلة الأخيرة الخالية من الثوابت .

والآن إلى التطبيق الثاني .

**( Motion in the presence of velocity - dependent friction )**

ماهي المسألة هنا ؟

جسم ذو كتله $m$ يتحرك تحت تأثير قوة $F(t)$ ولكن هناك قوة احتكاك متناسبة مع السرعة .

هنا من قانون نيوتن الثاني للحركة :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F(t) - \lambda\frac{dy}{dt}$$

حيث $-\lambda\frac{dy}{dt}$ هي قوة الإحتكاك ، و $y(t)$ هي المسافة التي تحركها الجسم في زمن $t$ .

وكما نعلم فإن $\frac{dy}{dt}$ هي السرعة . وعليه تصبح المعادلة التي تحكم الحركة هي :

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) - \lambda v$$

او :

$$m\frac{dv}{dt} + \lambda v = F(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى .

نحلها كما في الوحدة الثالثة . وإذا كانت $F(t)$ ثابتة $F_0$ ( كما في مسائل المقذوفات حيث قوة الجاذبيه ثابته ) .

فإن حل المعادلة(**) يعطى :

$$\boxed{v = \frac{F_0}{\lambda} + c\,e^{-\frac{\lambda t}{m}}}$$

حيث $c$ ثابت ما .

وهنا نجد كلا من $\lambda$ , $F_0$ من معطيات المسألة .

ولنأخذ مثالا على ذلك :

**مثال(2)** : جسم سقط من السكون من ارتفاع 500 متر فوق سطح الأرض تحت تأثير قوة الجاذبيه . وكان هناك قوة مقاومة الهواء والتي تتناسب مع السرعة بثابت التناسب $\lambda = 3$ كغم /ثانية . اذا كانت قوة الجاذبية ثابتة حيث $m = 3$ كغم وكان $g = 9.81$ . جد متى يضرب الجسم الأرض ؟.

**الحـــل** : المعادلة التي تحكم الحركة هي :

$$m\frac{dv}{dt}+\lambda v = mg$$

وحلها هو

$$v=\frac{mg}{\lambda}+c\,e^{-\frac{\lambda t}{m}}$$

هنا $\lambda = 3$ ، $mg = (3)\times(9.81)$ . إذن

$$v=\frac{3(9.81)}{3}+c\,e^{-\frac{3t}{3}}$$

أي :

$$v = 9.81 + c\,e^{-t}$$

بقي علينا أن نجد $c$ . ولكن السقوط من السكون يعني $v(0) = 0$ وعليه :

$$0 = 9.81 + c$$

ومنه $c = -9.81$ . إذن

$$v(t) = 9.81 - 9.81\,e^{-t}$$

والآن المطلوب هو بعد كم دقيقة يصبح ارتفاع الجسم عن الأرض صفرا .إذن لا بد من إيجاد معادلة تحكم المسافة . ولكن $v(t)=\frac{dy}{dt}$ . إذن

$$\frac{dy}{dt} = 9.81 - 9.81\,e^{-t}$$

ومنه

$$y = (9.81)\,t + 9.81\,e^{-t} + b$$

وعادة في الأجسام الساقطة تعتبر نقطة الأصل هي نقطة السقوط . وعليه $y(0) = 0$ . ومنه $b = -9.81$ . وعليه

$$y = (9.81)\,t + 9.81\left(e^{-t} - 1\right)$$

والآن المطلوب قيمة $t$ عندما كان $y(t) = 500$ .

$$500 = (9.81)\,t + 9.81\left(e^{-t} - 1\right)$$

وبحل هذه المعادلة نصل إلى $t \approx 51.97$ ثانية .

## مســــائــل

الوحدة التاسعة

بند(2)

(1) درجه حرارة جسم ما $72° F$ . وضع الجسم في العراء حيث درجة الحرارة $20° F$ . بعد خمس دقائق وصلت حرارة الجسم $55° F$ . كم من الزمن يحتاج الجسم لتصبح حرارته $32° F$ ؟ .

(2) وضع جسم درجة حرارته $T$ في غرفة درجة حرارتها ثابتة $68° F$ . وبعد 10 دقائق أصبحت حرارة الجسم $50° F$ ، وبعد 15 دقيقة أصبحت $55° F$ . ما هي درجة حرارة الجسم الأصلية ؟.

(3) سقط جسم ذو كتلة 5 كغم من حالة السكون من على ارتفاع 1000 متر من سطح الأرض . فإذا كان سقوط الجسم بتأثير الجاذبية وكانت قوة مقاومة الهواء متناسبة مع سرعة الجسم ، وثابت التناسب كان $k = 50$ كغم /ثانية ، عين معادلة الحركة ، وحدد متى يصل الجسم الأرض ؟ .

(4) قذف جسم إلى الأسفل بسرعة أولية 50 م/ثانية . وترك يسقط بتأثير الجاذبية . إذا كانت كتلة الجسم 5 كغم وكانت قوة مقاومة الهواء هي $10v$ حيث $v$ هي سرعة الجسم بالأمتار في الثانية . جد معادلة الحركة ؟ . وإذا كان ارتفاع الجسم عن الأرض هو 500 م ، فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى الأرض ؟.

---

## 3- تطبيقات للمعادلات الخطية من المراتب العليا .

**( Applications of higher order linear differential equations )**

هناك تطبيقات كثيرة لمعادلات المرتبة الثانية ( وأكثر ) الخطية . وسوف نعرض تطبيقا واحدا فقط :

### الحركة التوافقية البسيطة

( Simple harmonic motion )

ما هي المسألة هنا ؟

جسم يتحرك بتأثير قوة متناسبة مع الإزاحة من مركز السكون .

فإذا كانت الإزاحة من مركز السكون هي $y(t)$ فإن القوة المؤثرة $F(t) = -\lambda\, y(t)$ . ووفق قانون نيوتن الثاني للحركة فإن المعادلة التي تحكم هذه الحركة هي :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda\, y$$

أو

$$my'' + \lambda y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

وهذه معادلة خطية من المرتبة الثانية .

نحلها : المعادلة الملازمة للمعادلة(*) هي :

$$mr^2 + \lambda = 0$$

والتي جذورها $r = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ . وعليه يكون الحل العام :

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + c_2 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t \quad \cdots\cdots\cdots (**) \\ &= c_1 \cos wt + c_2 \sin wt \end{aligned}$$

حيث $w = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ . وحتى نجد $c_1$ , $c_2$ لا بد من شروط أولية وعادة تكون شروط على السرعة الإبتدائية . أي $y(0) = a$ , $y'(0) = b$ .

ومن المعادلة(**) نلاحظ أن $y(0) = a = c_1$ ولو فاضلنا المعادلة(**) وعوضنا $t = 0$ لوجدنا $y'(0) = w\, c_2$ . ومنه $c_2 = \frac{y'(0)}{w}$ ، ولذلك تصبح المعادلة :

$$y(t) = y(0)\cos wt + \frac{y'(0)}{w}\sin wt \qquad \cdots\cdots (***)$$

وعندما تكون الحركة ذبذبية منتظمة حول مركز السكون فإن شكل المعادلة(***) يكون افضل للدليل على واقع الحركة لو أخذ الشكل :

$$y(t) = A\cos(wt + \Phi)$$

حيث

$$\sin\Phi = \frac{-y'(0)\,w}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}} \ , \ \cos\Phi = \frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}} \ , \ A = \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}$$

تسمى $A = \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}$ سعة $y$ .

وتسمى $\Phi$ زاوية الطور للاقتران $y$ .

في حين $\frac{2\pi}{w}$ هي دورة $y$ بينما $\frac{w}{2\pi}$ هي ذبذبة الاقتران $y$ .

**مثال(1)** : جسم ربط إلى زنبرك ثم بدأت الحركة بعد أن مُطّ الزنبرك ( وبطرفه الجسم ) مقدار 2 سم ثم أطلق من مرحلة السكون اذا كانت المعادلة التي تحكم الحركة هي $16\,y'' + 4\,y = 0$ وكان $y'(0) = 0$ , $y(0) = 2$ . جد اقتران الازاحة عند أي زمن ؟ .

**الحــل** : المعادلة $16\,y'' + 4\,y = 0$ هي خطية من المرتبة الثانية . المعادلة الملازمة :

$$16\,r^2 + 4 = 0$$

ومنه $r = \pm\frac{1}{2}\,i$ .

إذن

$$y = c_1\cos\frac{1}{2}t + c_2\sin\frac{1}{2}t$$

وحيث أن $y(0) = 2$ فإن $c_1 = 2$ . وحيث أن $c_2 = \frac{y'(0)}{\frac{1}{2}}$ فإن $c_2 = 0$ . إذن

$$\boxed{y(t) = 2\cos\frac{t}{2}}$$

**مثال(2)** : جد السعة ، الدورة ، الذبذبة وزاوية الطور للحركة :

المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + 9y = 0 \ , \ y(0) = -2 \ , \ y'(0) = -6$$

**الحــل** : نجد أولاً $w$ . ولكن من تعريفنا لـ $w$ : $w = 3$ .

إذن : الدورة هي $\frac{2\pi}{w}$ . أي $\frac{2}{3}\pi$ .

الذبذبة : $\frac{w}{2\pi}$ . أي $\frac{3}{2\pi}$ .

السعة :

$$A = \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}$$

$$= \sqrt{4 + \frac{36}{9}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

أما زاوية الطور :

$$\cos\phi = \frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}}$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\phi = \frac{-y'(0)\cdot w}{A} = \frac{+6/3}{2\sqrt{2}} = \frac{+1}{\sqrt{2}}$$

ومنه $\phi = 215^\circ$ أو $\phi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ .

ونكتفي بهذا القدر لنذهب إلى بند آخر .

## ٤- تطبيقات لمنظومات المعادلات الخطية .

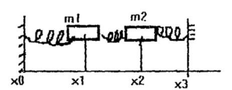
**(Application of linear systems of differential equations)**

هناك العديد من التطبيقات لمنظومات المعادلات الخطية . فهناك تطبيقات في الدوائر الكهربائية وفي الأحياء وفي الإحصاء لكننا سنعرض تطبيقاً فيزيائياً :

### حركة منظومة أجسام مربوطة بزنبرك

( Coupled spring - mass systems )

لنفرض أن جسمين ذا كتلتين $m_1$ , $m_2$ ربطتا بزنبرك كما في الشكل(١) :




وضبطا ليتحركا حركة أفقية . ونريد أن ندرس حركة هذه المنظومة عندما تقع تحت تأثير قوة خارجية تعتمد على الزمن وقوة معيقة للحركة متناسبة مع سرعة الأجسام المعنية .

والآن لنبدأ بفهم واقع المسألة .

(1) نفرض أن الزنبركات الواصلة بين $m_1$ و $m_2$ والواصل بين $m_1$ والنقطة $x_0$ ( كما في شكل(2) ) والواصل بين $m_2$ والنقطة $x_3$ واحد في الطول والمادة .

وعليه يكون $l_1 = l_2 = l_3 = l$ وعوامل المط ( التي تظهر في قانون هوك ) أيضاً واحدة $k_1 = k_2 = k_3 = k$ .

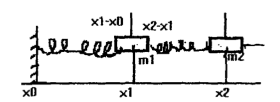
(2) الحركة تعطي كل جسم إزاحة عن موضعه الأصلي .

فإذا كانت المواضع الجديدة للأجسام بعد الإزاحة هي $x_1$ , $x_2$ فإن :

إزاحة الجسم الأول هي : $x_1 - x_0 - l$ .

إزاحة الجسم الثاني : $x_2 - x_1 - l$ .

كما هو مبين في شكل (2) .




(3) يؤثر على كل جسم من الجسمين ثلاث قوى :

قوة مط الزنبرك ، وقوة الإعاقة من الوسط المغمور فيه المنظومة والقوة الخارجية والمعتمدة على الزمن .

أما قوة مط الزنبرك فعلى الجسم الأول هناك قوتان :

قوة معاكسة لاتجاه الحركة $F_{11} = -k(x_1 - x_0 - l)$ ، وقوة باتجاه الحركة $F_{12} = k(x_2 - x_1 - l)$ . وكذلك الجسم الثاني :

$F_{22} = k(x_3 - x_2 - l)$ ، $F_{21} = -k(x_2 - x_1 - l)$ .

أما قوة الإعاقة فعلى الجسم الأول $G_1 = -a\dfrac{dx_1}{dt}$ وعلى الجسم الثاني $G_2 = -b\dfrac{dx_2}{dt}$

وأما القوى الخارجية فلنفرض أنها $F_1(t)$ , $F_2(t)$ . وعليه فإن قانون نيوتن الثاني للحركة يعطينا :

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_0 - l) + k(x_2 - x_1 - l) - a\frac{dx_1}{dt} + F_1(t)$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - l) + k(x_2 - x_1 - l) - b\frac{dx_2}{dt} + F_2(t)$$

والآن وجود القوى $F_1$ , $F_2$ يجعل النقاط $x_0$ , $x_3$ غير مثبتة . فإذا ما فرضنا أن $x_0$ , $x_3$ مثبتين فإن $F_2(t) = F_1(t) = 0$ . والآن إلى منظومة معادلات الحركة :

$$m_1\frac{d^2x_1}{dx_1^{\,2}} + a\frac{dx_1}{dt} - k(x_0 - 2x_1 + x_2) = F_1(t)$$
$$m\frac{d^2x_1}{dx_2^{\,2}} + b\frac{dx_2}{dt} - k(x_1 - 2x_2 + x_3) = F_2(t)$$

وهذه منظومة معادلات من المرتبة الثانية . فنقوم بتحويلها إلى منظومة من المرتبة الأولى عبر التعويضات التالية :

$$y_1 = x_1 - x_1(0)$$

$$y_2 = x_2 - x_2(0)$$

$$y_3 = m_1 \frac{dx_1}{dt}$$

$$y_4 = m_2 \frac{dx_2}{dt}$$

حيث $x_1(0)$ , $x_2(0)$ هو وضع الجسم في مرحلة الإتزان ( أو السكون ) . وعليه نحصل على المنظومة :

$$y_1' = \frac{1}{m_1} y_3$$

$$y_2' = \frac{1}{m_2} y_4$$

$$y_3' = -2k y_1 + k y_2 - \frac{a}{m_1} y_3 + F_1$$

$$y_4' = k y_1 - 2k y_2 - \frac{b}{m_2} y_4 + F_2$$

وهذه منظومة من الشكل :

$$Y' = \Lambda Y + F$$

حيث

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -2k & k & -\frac{a}{m_1} & 0 \\ k & -2k & 0 & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

طبعا ، اذا أراد احدنا أن يجعل الأمر سهلاً وبسيط . ممكن فرض أن الوسط المغمورة فيه منظومة الأجسام لا يولد قوة إعاقة . ولذلك $a = b = 0$ .

ويمكن حل المنظومة $Y' = \Lambda Y + F$ بطرق الوحده الثامنة .

## مســـــائـــل

الوحدة التاسعة

**بند(3)**

(1) جد السعة ، الدورة ، وزاوية الطور للحركة المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + x^2 y = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = \pi\sqrt{2}$$

(2) جد السعة ، الدورة ، وزاوية الطور للحركة المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + 9y = 0 \ , \ y(0) = -2 \ , \ y'(0) = -6$$

(3) زنبرك به كتله حركته محكومة بالمعادلة :

$$16y'' + 4y = 0$$

فإذا بدأت الحركة عندما مُطّ الزنبرك وحدتين ثم أُطلق من السكون . جد الشروط الأولية للحركة ثم جد الإقتران $y$ الذي يحكم الحركة ؟ .

---

# الأجوبة

## الوحدة الأولى

### بند(1) :

(1) (a) نعم　　(b) لا　　(c) لا　　(d) نعم

(3) (a) لا　　(b) نعم　　(c) لا

(5) لنفرض أن $v \neq 0$ ولكن $r\,v = 0$ . يجب أن نبرهن أن $r = 0$ . ولكن إذا كان $r \neq 0$ فإن $\frac{1}{r}(r\,v) = \frac{1}{r}\cdot 0$ ولكن $\frac{1}{r}(r\,v) = v$ . وكذلك من سؤال رقم (4) من هذا البند نحصل على $\frac{1}{r}\cdot 0 = 0$ . إذن $v = 0$ .

### بند(2) :

(1)

$$(a)\quad = E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$(b) = E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad (c) = E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(3) (a) نعم　　(b) لا　　(c) لا .

(5) (a) مستقلة　　(b) مستقلة　　(c) معتمدة　　(d) معتمدة .

(7) (a) مستقلة　　(b) مستقلة　　(c) مستقلة　　(d) معتمدة .

### بند(3) :

(1) (a) 1　　(b) 2　　(c) 2　　(d) 2 .

(3)

(a) $\left\{\left(\frac{2}{3},1,0\right), \left(-\frac{5}{2},0,1\right)\right\}$

(b) $\{x, x^2, x^3\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

**بند(4) :**

(1) (a) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 11 & 14\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}-6 & -4\\ -8 & -6\end{pmatrix}$

(2) (a) 2- (b) 20 (c) 120 (d) 120 .

**بند(5) :**

(1) (a) $\lambda_1=-1 \ , \lambda_2=-2 \ , \lambda_3=-\frac{1}{2}$

(b) $\lambda=2$ (c) $\lambda_1=3 \ , \lambda_2=-1$

(d) $\lambda_1=6 \ , \lambda_2=-5$

(3) إذا كان $A\,v = \lambda v$ فإن :

$A(a\,v) = a\ Av = a\ \lambda v = \lambda\,(av)$ .

## الـوحـدة الثانـيـة

**بند(1) :**

(1) (a) معادلة تفاضلية عادية .

(b) معادلة عادية .

(c) معادلة تفاضلية جزئية .

**بند(2) :**

(1) (a) نعم (b) نعم (c) نعم (d) نعم (e) !

(3) $k = -2, 3$ .

بند(3) :

(I) (a) نعم (c) نعم (e) لا .

بند(4) :

(I) $(1)\quad y = Ce^{\frac{2x}{3}}$ $\quad (3)\ y = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^{x} + C$

$(5)\ y = cxe^{\frac{x^2}{2}} - 1 \quad (7)\ x = 2\ln|y^5 + 3y + 2| + C$

(II) $(1)\quad y = \frac{x}{e}$ $\quad (3)\ y^3 = 8 - \int_1^x e^{x^2} dx$

$(5)\quad y = (1 - \pi + 2\sin^{-1} x) \quad (7)\ y = \tan(1 - \frac{1}{x})$

بند(5) :

(I) (a) لا (b) نعم ، الدرجة = صفرا (c) نعم ، الدرجة =1

(d) لا (e) نعم ، الدرجة = صفرا .

(2)

(a) $y = x\sqrt{(13x^3 - 1)/3}$

(b) $y = xe^{x}$ $\quad$ (c) $y^2 = x^2 (ce^{8/3} - 1)/4$

بند(6) :

(I)

$(1)\ x^2y + 2y^2 = C$

$(3)\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C \qquad (5)\ \ln|y| - \frac{y}{x+y} = C$

$(7)\ \ln|x| - \ln|y| + \ln\left(xy + \sqrt{1 + (xy)^2}\right) = C \quad (9)\ y\ln x + x\ln y = C$

$(11)\ \sin xy + \cos xy = C \qquad (13)\ x + \sec xy + x\tan xy = C$

$(15)\ \tan^{-1} xy = C$

(II) (c) كل قيم r $\quad$ (a) $r = -2$

**بند(7) :**

**(I)**

(a) $y = 3 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$

(c) $y = \left[\frac{x^2}{2} + C\right]e^{2x}$

(c) $y = x^2 + \left(C - \frac{x^3}{3}\right)\ln|x|$

**(II)**

(1) $x^3 - \frac{1}{xy} = C \ , \ y = 0$

(3) $\frac{y^2}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{y} = C$

(5) $\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{xy} = C$

(7) $\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2(x^2 + y^2)} = C$

(9) $\frac{x}{y^2} + xy = C \ , \ y = 0$

(11) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = C$

(13) $\ln|y| + \frac{1}{(xy)^2} = C$

(15) $y = cx - x^2 - 1$

**بند(8) :**

(1) $(x - y + 1)^3 = c(x + y - 3)$

(3) $(3x - y - 11)^3 = 11(x - y)^2 + c$

(5) $(x + 7)^2 y = -\frac{x^2}{3} - 5x^2 - 21x + c$

(7) $(y - 2x - 3)^2 = c(y - x - 2)$

(9) $9x^2 - \frac{225}{16} + (4x + 5y - 5)^2 = c$

**بند(9) :**

(1) $y = c_1x^2 + c_2$

(3) $y = -\frac{x^2}{2} + c_1e^x + c_2x + c_3$

(5) $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$

(7) $c_1y = \tan(c_1x + c_2)$ and $y = c$

(9) $y = \tan(c_1x + c_2)$

# الــوحــدة الثالثــة

**بند(1) :**

(1) خطية غير متجانسة      (3) غير خطية .

(5) غير خطية      (7) خطية متجانسة .

(9) غير خطية .

**بند(2) :**

(1) $L(e^{2x}) = 4x^2e^{2x} + e^{2x}$ . $L(\sin x) = -x^2 \sin x + \sin x$

(3) $y = e^{2x} - 2e^{x}$

(4)

(a) حل وحيد على الفترة $(-\pi/2 \ , \ \pi/2)$ .

(c) حل وحيد على الفترة $(0 \ ، \ 3)$ .

(e) حل وحيد على $(-\infty \ ، \ 1)$ .

**بند(3) :**

(1) $y = x - 1 + ce^{x}$      (3) $y = \frac{e^{x}}{2} + ce^{x}$

(5) $y = -3\cos^2 x + c\cos x$      (7) $y = x\int \frac{\cos x}{x}\, dx + cx$

(9) $y = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$      (11) $y = xe^{2x} + \frac{c}{x}e^{2x}$

**بند(4) :**

(1) $y = \left[\frac{2}{3} + ce^{x/2}\right]^{2/3}$

(3) $y = x(\ln|x| + c)^{1}$      (5) $y = \left[2x^{10} + cx^{8}\right]^{1/4}$

(7) $y' = 1 + ce^{x^2}$      (9) $y = \left[-\frac{2}{3}\ln|x| + c(\ln|x|)\right]^{1}$

**بند(5) :**

(1)

(1) $W = -\frac{1}{x}$      (3) $W = e^{\cos x}$

(II)

(1) $y_2 = xe^x$ (3) $y_2 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

(5) $y_2 = -1 + \dfrac{x}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

**بند(6) :**

(I)

(1) $xD^2 + (2+x^2)D + x$ ,

$-x\cos x + (2+x^2)\cos x + x\sin x$

(5) $xD^2 + (1-2x)D + (x-1)$ ,

$x-1$

(II)

(1) $(D-\sqrt{2})(D+\sqrt{2})$

(3) $(D+1)^2(D+3)$

(5) $D(D-2)(D-3)(D+1)$

(III)

(1) $(D^2 + 5xD - e^x)y = 0$

(2) $(D^2 - x^2D + \sin x)y = 1$

(3) $(e^x D^2 + D + 1)y = x$

## الوحدة الرابعة

**بند(1) :**

(I)

(1) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$

(3) $y = c_1e^x + c_2xe^x$

(5) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$ (7) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{3x}$

(9) $y = e^{3x} - e^{2x}$ (11) $y = 2e^{-3x} + 6xe^{3x}$

(II)

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(b) $y'' + 4y = 0$

بند(2) :

(I)

(1) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}$ (3) $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$

(5) $y = c_1e^{14x} + c_2xe^{14x}$

(II)

(1) $D^2y = 0$ (3) $(D-1)^2y = 0$

بند(3) :

(I)

(1) $y = c_1\cos x/3 + c_2\sin x/3$

(3) $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$

(5) $y = c_1e^{x}\cos\sqrt{3}\,x + c_2e^{x}\sin\sqrt{3}\,x$

(II)

(1) $y'' + y = 0$

(3) $y'' + 4y' + 13y = 0$

(5) $y'' - 6y' + 15y = 0$

بند(4) :

(I)

(1) $y_g = c_1e^{x} + c_2e^{x} - x$

(3) $y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{x} + x \quad 1$

(5) $y_g = c_1e^{x}\cos\sqrt{3}\,x + c_2e^{x}\sin\sqrt{3}\,x + \sin 2x$

(II)

(1) $y_g = c_1e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 5\cos x$

(3) $y_g = c_1e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\cos x + 6e^{2x}$

**بند(5) :**

**(I)**

(1) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{-x} + 3 + x$

(3) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$

(5) $y = c_1 e^{-3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x - 2e^{x} \cos x + 4e^{x} \sin x$

(7) $y = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{x/3} - \frac{9}{50} \cos x - \frac{1}{10} x \sin x$

(9) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{3}{2} e^{x} + x^2 - 2x$

**(II)**

(1) $y_p = (c_1 + c_2 x) x^2 e^{2x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) \cos x + (c_6 + c_7 x + c_8 x^2) \sin x$

(3) $y_p = (c_1 x^2 + c_2 x) \sin x + (c_3 x^2 + c_4 x) \cos x + c_5 10^{x}$

(5) $y_p = e^{x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$

**بند(6) :**

(1) $y = (c_1 + \ln|\cos x|) \cos x + (c_2 + x) \sin x$

(3) $y = \frac{2x - 1}{32} e^{2x} + (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

(5) $y = \frac{1}{4} e^{x/2} (-x \sin x - 2\cos x + c_1 + c_2 x)$

(7) $y = c_1 \cos 4x + c_2 \cos 4x + \frac{x}{2} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x \ln|\cos 4x|$

(9) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + [(\cos 2x) \ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x| - 1]/4$

(11) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln|\sec x + \tan x| - 2$

(13) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} (\cos 2x) \ln|\sec 2x + \tan 2x|$

## الوحـدة الخامسة

**بند(1) :**

(I)

(1) $(-\infty\ ,\ 0)$ (3) $(3\pi/2\ ,\ 5\pi/2)$

(5) $(0\ ,\infty)$

**بند(2) :**

(I)

(1) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$

(3) $y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{3.2x}$

(5) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3e^{1.2x}$

(7) $y = c_1 + c_2x + c_2e^{-x} + c_4e^{x}$

(9) $y = (c_1 + c_2x)\cos 3x + (c_3 + c_4x)\sin 3x$

(11) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

(13) $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)\,e^{x}$

(I)

(1) $D^2(D+1)^2y = 0$

(3) $(D^2+1)^2y = 0$

**بند(3) :**

(I)

(1) $y_p = \frac{3}{2}e^{x} + x^2 - 2x$

(3) $y_p = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ (5) $y_p = -\frac{1}{2}xe^{2x}$

(7) $y_p = \frac{1}{2}(x-1)e^{x}$ (9) $y_p\ \ {-2} + 2x\ \ xe$

(II)

(1) $y_p = c_1e^{x} + x^2\left[(c_2 + c_3x + c_4x^2)\cos x + (c_5 + c_6x + c_7x^2)\sin x\right]$

(3) $y_p = x^2\big[(c_1 + c_2x)e^{x} + (c_3 + c_4x)e^{-x} + (c_5 + c_6x + c_7x^2 + c_8x^3)\cos x$
$\quad + (c_9 + c_{10}x + c_{11}x^2 + c_{12}x^3)\sin x\big]$

**بند(4) :**

(1) $y=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^x+c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^x$

(3) $y=-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)+c_1+c_2x+c_3e^{2x}$

(5) $y=\frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x)+c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}$

(7) $y=\frac{1}{2}\cos x+c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x$

(9) $y=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-c_1\right)e^x+c_2+c_3x+c_4e^{-x}$

**بند(5) :**

(1) $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^3}$

(3) $y=c_1x^{4+\sqrt{4}}+c_2x^{4-\sqrt{4}}$

(5) $y=c_1x^3\cos(4\ln x)+c_2x^3\sin(4\ln x)$

(7) $y=c_1x+c_2\sqrt{x}$

(9) $y=c_1(x-1)^{-1}+c_2(x-1)^{-1}\ln|x-1|$

(11) $y=c_1(x-3)+c_2(x-3)\ln|x-3|+c_3(x-3)^{-1}$

**بند(6) :**

**(I)**

(1) $L=D^5$ (3) $L=D+7$

(5) $L=(D-2)(D-1)$ (7) $L=\left[(D+1)^2+4\right]^3$

(9) $L=(D+2)^2\left[(D+5)^2+9\right]^2$

**(II)**

(1) $y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3$

(3) $y_p=c_1xe^{3x}+c_2x^2+c_3x+c_4$

(5) $y_p=c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

# الـوحـدة السادسة

**بند(1) :**

(1) لا   (3) لا   (5) نعم

(7) لا   (9) $\frac{1}{s-1}$   (11) $\frac{a}{s^2+a^2}$   (13) $\frac{1}{s^2-1}$

**بند(3) :**

(1) $\frac{2}{s^3+4s}$   (3) $\frac{1}{(s-1)^2+1}$

**بند(4) :**

(1) $\frac{2}{s^3}+\frac{2}{(s-1)^2+4}$

(3) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}+\frac{1}{s-6}-\frac{1}{s}$   (5) $\frac{4}{(s+1)^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+16}$

(7) $\frac{s}{2(s^2+9)}-\frac{s}{2(s^2+49)}$   (9) $\frac{(s+3)\cos 4-2\sin 4}{(s+3)^2+4}$

(11) $-\left[(s-2)\frac{d}{ds}\hat{f}(s-2)+\hat{f}(s-2)\right]$

(13) $\frac{2(s-2)}{s\left[(s-2)^2+1\right]^2}$

(15) $\frac{s^4-16s^3+120s^2-400s+460}{5\left[(s-3)^2+1\right]^3}$

**بند(5) :**

(1) $1-e^{-t}$   (3) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}$

(5) $\frac{1}{5}e^{-2t}\sin 5t$   (7) $t\sin t$   (9) $\frac{3}{2}\sin t+\frac{3}{2}t\cos t$

(11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cosh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$

(13) $\frac{1}{t}\left[e^{-2t} - e^{3t}\right]$

**بند(6) :**

(1) $y = \left(\sin t - \cos t + e^{-2t}[\sin t + \cos t]\right)/8$

(3) $y = e^{-t}[\sin t + \cos t]$

(5) $y = \left[e^{2t} - 8e^{t} + 7 - 6t + 2t^2\right]/4$

(7) $y = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}$

(9) $y = \frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sin\sqrt{2}t + t - \frac{2}{3}$

**بند(7) :**

(1) $\frac{(3s+2)e^{-\frac{s}{2}}}{2s^2}$ (3) $\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

(5) $\frac{1}{s^2}\left[1 - 4e^{-2s} + 4e^{-3s} - e^{-4s}\right]$

(15) $y = \begin{cases} 1-e^{-t} & 0 \le t \le 1 \\ te^{1-t} - e^{-t} & t > 1 \end{cases}$

**بند(8) :**

(1) $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$ $(a \neq b)$ , $te^{at}$ $(a = b)$

(3) $t$ (5) $y = \left[4t^3 - 9t^2 + 24t - 18\right]/6$

(7) $y = (4 - 7t + 4t^2)/e^{t}$ (9) $y = t - \frac{t^2}{2}$

(11) $e^{2t} - e^{t}$ (13) $e^{2t/3} - e^{-t/2} + e^{t/6}$ (15) $\frac{e^{t} + \sin t - \cos t}{2}$

## الوحدة السابعة

**بند(1) :**

(1) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$

(5) $1+\sum_{n=1}^{\infty}2x^{n}$

**بند(2) :**

(1) $-1+2(x+1)-3(x+1)^2+22\frac{(x+1)^3}{6}$

(3) $1+x+x^2/2+x^3/3$

(5) $1-(\sin 1)\frac{x^2}{2}+\frac{(\sin 2)x^4}{48}$

(7) $1+2x+\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{3}$

**بند(3) :**

(1) $\{1,-2,-3\}$ (3) $\{-6,1\}$ (5) $\{-7\}$

(7) $0$ ، $-1$ ، $4$ ، $-4$ نظامية ، $1$ غير نظامية .

(9) $-1$ ، $\pm n\pi$ , $n\in N$ نظامية ، $0$ غير نظامية .

(11) $-2$ ، $4$ ، $-4$ نظامية ، $0$ غير نظامية .

**بند(4) :**

(1) $y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

(3) $y=a_0\left(1-2x^2+\frac{x^4}{3}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-1)\cdots(2n-5)x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

(5) $y=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)x^{3n}}{(3n)!}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)x^{3n+1}}{(3n+1)!}\right)$

(7) $y=a_0(1-3x^2)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$

$$(9)\ y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{3(n!)} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{1(1+3\cdot 1)+\cdots+(1+3n)}$$

$$(11)\ y = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!\left[2\cdot 5\cdots(3n-1)\right]} \right] + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}$$

**بند(5) :**

(1) $s^2 - 3s - 1$

(3) $s^2 = 0$

(5) $s^2 = 0$

(7) $s^2 - 3s - 10 = 0$

**بند(6) :**

$$(1)\ y = a_0 \left[ x^{2/3} - \frac{1}{2} x^{5/3} + \frac{5}{28} x^{8/3} - \frac{1}{21} x^{11/3} + \cdots \right]$$

$$(3)\ y = a_0 \left[ 1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2304} x^6 + \cdots \right]$$

$$(5)\ y = a_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{60} x^4 + \cdots \right]$$

$$(7)\ y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3/2}}{(n+2)!}$$

$$(9)\ y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n}(n+1)!\, n!}$$

**بند(7) :**

$$(1)\ y_1 = \sqrt{|x|} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1\ , a_k = \frac{2}{k(2k+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2j-15}{4^{k-j-1}} a_j \quad , k \geq 1\ ,\ 0 < |x| < 4$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1\ , a_k = \frac{1}{k(2k-1)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j-8}{4^{k-j}} a_j \quad , k \geq 1\ ,\ |x| < 4$$

(3) $y_1 = |x|^{5/4}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$

$$a_0 = 1 \ , a_k = \frac{(-1)^k}{4^{k-1}k(4k+5)}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j 4^j (4j+7)a_j \quad , k \geq 1 \ , \ 0 < |x| < 4$$

$y_2 = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k,$

$$a_0 = 1 \ , a_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}k(4k-5)}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j 4^j (4j+7)a_j \quad , k \geq 1 \ , \ |x| < 4$$

(5) $y_1 = x \ , \ y_2 = x^{2/3}\sum_{0}^{\infty} a_k x^k \ ,$

$$a_0 = 1 \, , a_k = \frac{3k-8}{3k}a_{k-1} \ , \ k \geq 1$$

(7) $y_1 = x \ , \ y_2 = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,k}x^{k+1} + x\ln x$

(9) $y_1 = x^{-1}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(k!)^2}\right]$

$$y_2 = 2x^{-1}\sum_{0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}}{(k!)^2}x^k + x^{-1}\left[1+\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(k!)^2}\ln x\right]$$

(11) $y_1 = 4!\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k+4)!}x^{k+4}\right]$

$$y_2 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2$$

## الوحـدة الثامنة

**بند(2) :**

$$(5)\ \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$(7)\ \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

**بند(3) :**

$$(1)\quad y_1 = 5e^{x}\ ,\ y_2 = -5e^{x}$$

$$(3)\quad y_1 = 5e^{x} + u_1(x)\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{3(x-1)} - \frac{1}{2}e^{-(x-1)}\right]$$

$$y_2 = -5e^{x} + u_1(x)\left[-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}e^{3(x-1)} + \frac{1}{2}e^{-(x-1)}\right]$$

$$(5)\quad y_1 = e^{x}(x - x^2)\quad ,\ y_2 = x^2e^{x}$$

**بند(4) :**

$$(1)\ Y = \begin{pmatrix} c_1e^{x} + c_2e^{-x} \\ c_1e^{x} + 3c_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$(3)\ Y = \begin{pmatrix} 7c_1e^{5x} + c_2e^{-x} \\ c_1e^{5x} + 3c_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$(5)\ Y = \begin{pmatrix} -c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \\ 4c_1e^{x} - c_2e^{2x} + 2c_3e^{3x} \\ c_1e^{x} - c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \end{pmatrix}$$

**بند(5) :**

$$(1)\quad Y = c_1\begin{pmatrix} -e^{x}\sin x \\ e^{x}\cos x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{x}\cos x \\ e^{x}\sin x \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad Y = c_1\begin{pmatrix} e^{x}\left(-\cos x\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin x\sqrt{2}\right) \\ 3e^{x}\cos x\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{x}\left(\sqrt{2}\cos x\sqrt{2} - \sin x\sqrt{2}\right) \\ 3e^{x}\sin x\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**بند(7) :**

$$(1)\quad Y = c_1\begin{pmatrix} e^{3x}(\cos 2x - \sin 2x) \\ 2e^{3x}\cos 2x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x) \\ 2e^{3x}\sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad Y = c_1\begin{pmatrix} (1+4x)e^{x} \\ 4xe^{x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4xe^{x} \\ (1-4x)e^{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+(x+2)^2e^{x} \\ 1+2x^2e^{x} \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad Y = c_1\begin{pmatrix} 6e^{4x} \\ e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

## الوحـدة التاسعة

**بند(1) :**

(1) $y^2 = cx$  (3) $y = x + 1 + ce^{x}$

(5) $x^2 + y^2 = c^2$

(7) (a) $x(t) = 600\left[1 - e^{-t/50}\right]$

(b) $t = 50 \ln 3$

(9) $x = 30 - 25/e^3$

**بند(2) :**

(1) $t = 5\left[\ln\left(\frac{12}{52}\right) \Big/ \ln\left(\frac{35}{52}\right)\right] \approx 18.5$

(3) 1019 ثانية

**بند(3) :**

(1) $2 , 4\pi/3 , 2$  (3) $y(0) = 2$ , $y'(0) = 0$ , $y(t) = 2(tx)/2$

# First Course In Differential Equation

Prof. Roshdi Khalil






دار المناهج
للنشر والتوزيع
تلفاكس: ٤٦٥٠٦٢٤، ص.ب: ٢١٥٣٠٨
عمّان ١١١٢٢ الأردن